

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2007～2010

課題番号：19204011

研究課題名 (和文) 表現論における積分と特殊関数

研究課題名 (英文) Integrals in representation theory and special functions

研究代表者

落合 啓之 (HIROYUKI OCHIAI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：90214163

研究代表者の専門分野：代数解析学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：表現論、特殊関数、超幾何関数

1. 研究計画の概要

本研究では、(微分)方程式系の解析、(特殊)解の研究、表現論と調和解析への応用、という3つの視点から『リー群の表現論で決定的な役割をする関数はどのような特殊関数か』を解明することを目的とする。たとえば次のようなことを考える。ベクトル値(多成分系)の微分方程式系を対象とし、その方程式系の分解を調べることでベクトル値の方程式系を解析する。より一般に方程式系の間の準同型ならびに表現の構成要素を合わせて調べる。非可換調和振動子のスペクトル問題を Heun の微分方程式に応用し、アクセサリパラメータの決定に対する問題を研究する。固有状態(固有関数)や固有値、スペクトルゼータも特殊関数とみてその振る舞いを研究する。領域に実現される表現の関数空間の決定と分解、準同形写像の特殊関数による表示、漸近形など、調和解析を行うのに必要となる基本的な関数の振る舞いを決定する。これらは積分変換や超幾何関数の手法や経験にも基づくが、超幾何関数を越えて行くことを遠望している。

2. 研究の進捗状況

落合と Zunderiya Uganbayar (名古屋大学) との研究では、Gelfand 型の多変数超幾何微分方程式系の関口英子 (東京大学) によって拡張されたものの研究を推し進めた。この方程式系は不定値ユニタリ群の既約表現をペンローズ変換で与えたときの特徴付けに関係するものであり、重複度有限性は小林理論(小林俊行、東京大学)の思想圏内にあるものであった。我々の研究では、非ホロノミー系であるという関口の予想の解決(フルラン

クあるいは行列サイズが4以上の場合)、非ホロノミー系であるにもかかわらず原点正則解の有限次元性の純微分方程式的根拠づけ、ならびに次元の組み合わせ的(Kostka 数)表示とそれによる漸近評価の改良を与えた。有限次元性の根拠は小林理論と互いに他を含むものではなく、独立に興味深い。

伊吹山知義(大阪大学)、葛巻孝子(岐阜大学)との共同研究では、ジューゲル保形形式に働く定数係数の偏微分作用素の特殊関数的な表示を企図し、研究を進めた。柏原 Vergne の重複度自由の設定を活かし、変数分離の長い計算を経て、BC 型のルート系に付随する球関数との関係づけが得られるというところまで一般の階数で導出した。論文執筆の最終の段階にある。

また、黒川信重(東京工業大学)との共同研究では、ヒルベルト行列の交代行列版の固有値分布を研究した。特殊な反自己共役な積分作用素と見ることで Dirac 作用素とも考えられる。対称行列版は良く研究されているが交代行列版は研究が少なく、しかし、むしろ、非自明な固有値の規則性が交代行列版に観察されることを指摘し、種々の予想を提唱した。将来の研究を促す点で意義あると考えている。

分担者の伊師は Graczyk (Angers 大学) と共同で、開凸錐に値をとる二次形式に付随するウィシャート分布の高次モーメントを計算する一般公式を得た。また、有界対称領域の Hua 多項式の一般化を有界等質領域について定義し、具体的に計算することで、有界等質代表領域の正規化したベルグマン核の負ベキを領域上で積分した値はベキの変数の多項式の逆数になるという結果を得た。ま

た、積分計算についてもベレーン解析の視点から有用な一般化が得られた。これは伊師と山路哲史、山盛厚伺（名古屋大学）の共同研究である。

多変数のマラー測度は多変数多項式に対して多重トラス上の積分で与えられる数値であるが、多項式の族に対しては族のパラメータに関する関数と考えることができる。ただし、超幾何関数や球関数とは異なり、サイクル上の積分とはならない場合が多い。落合は黒川信重、M.Lalin との共同の研究で、マラー測度の高次への拡張を考え、これらの母関数となるゼータ積分を導入した。高次のマラー測度の計算できる例は少ないが、多重対数関数や一般超幾何関数の関係式を巧みに用いることにより、いくつかの例を与えた。また、多重ゼータ関数に関して落合は複数の研究を行った。井原健太郎とは、多重ゼータ「値」の線形関係式の対称性を研究し、重さが3の場合に重シャッフル関係式の空間がワイル群の対称性を持つことを示した。また、松本耕二、中村隆、津村博文と共同で、多重ゼータ「関数」のうち Mordell-Tornheim 型と呼ばれるものに対して、線形関係式と解析接続における特異性の位置を考察した。その他、積分で表わされる特殊関数として、階数2のルート系に付随したベッセル関数のある種の拡張を考えた。

なお、研究の途中で、連携研究者の制度ができたことや、落合が所属を名古屋大学から九州大学に異動したことを反映し、研究組織の変更を適宜行った。

3. 現在までの達成度

②おのおお順調に進んでいる

(理由) 当初の計画の複数の柱のそれぞれについて新しい知見が得られている。

4. 今後の研究の推進方策

現在までの流れに沿って引き続き研究を進めたい。また、研究成果を論文として公表し、講演で周知することにも力を注ぐ。新たな着想として、木本一史（琉球大学）若山正人（九州大学）らの扱っているアルファ行列式の表現論においても、この研究課題が目指している積分表示の考え方が適用できると考えている。アルファ行列式は確率密度関数に由来を持ち、直交多項式系や特殊関数論とはなじみの深いものであり、正しい方向性であると期待している。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

①Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai,

Spectra of alternating Hilbert operators, Contemporary Mathematics 484 (2009) Spectral Analysis in Geometry and Number Theory, 89-101, 査読あり.

②Nobushige Kurokawa, Matilde Lalin and Hiroyuki Ochiai, Higher Mahler measures and zeta functions, Acta Arithmetica 135 (2008) 269-297, 査読あり.

③Kentaro Ihara and Hiroyuki Ochiai, Symmetry on linear relations for multiple zeta values, Nagoya Mathematical Journal 189 (2008) 49-62, 査読あり.

④Hiroyuki Ochiai, A special value of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillators, The Ramanujan Journal 15 (2008) 31-36, 査読あり.

⑤Michihiko Fujii and Hiroyuki Ochiai, An expression of harmonic vector fields on hyperbolic 3-cone-manifolds in terms of hypergeometric functions, Publ. RIMS. 43(2007) no. 3, 727-761, 査読あり.

[学会発表] (計 20 件)

① 落合啓之, Polynomial differential operators acting on automorphic forms, I, II, Workshop on Invariant Theory and Related Topics, Inha University, Korea, 2010. 2. 17 and 2. 19.

② 落合啓之, Invariant hyperfunctions on some semisimple symmetric spaces, Workshop on Harmonic Analysis and Invariant Distributions, National University of Singapore, 2009. 12. 16.

③ 落合啓之, Zeta functions and Casimir energies on infinite symmetric groups, 研究集会 Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, 2009. 11. 9, 九州大学西新プラザ.

④ 落合啓之, An algebraic transformation of Gauss hypergeometric function, 研究集会 Differential equations and symmetric spaces, 東京大学数理科学研究科 2009. 1. 16.

⑤ 落合啓之, Wreath determinant and cross ratio, 日露ワークショップ Harmonic analysis on homogeneous spaces and quantization, 東京大学玉原数学研究所 2008. 8. 29.

[その他]

①九州大学研究者情報

<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K003560/>

②ホームページ

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ochiai/>