

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2007～2010

課題番号：19204011

研究課題名（和文） 表現論における積分と特殊関数

研究課題名（英文） Integrals and special functions in representation theory

研究代表者

落合 啓之 (OCHIAI HIROYUKI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：90214163

研究成果の概要(和文):

本研究は、表現論に現れる積分や足し上げ操作で得られる特殊関数を研究対象とし、いくつかの場合に、それらの関数が満たす微分方程式や関数関係式を得ることや、特殊解を既存の特殊関数で表示するという結果を得た。また、同じ思考様式が適用できる枠組みとして、多成分系の線形微分方程式系のスペクトル問題やスペクトルゼータ関数、多重ゼータ関数なども研究の対象とし、特殊関数とのつながりや関数関係式を与える結果を得ている。これらは超幾何関数からそれを超えていく範囲への発展の手がかりとなっている。

研究成果の概要(英文):

The subject of this research is an integral and a sum arising in representation theory. We have obtained the differential equations, functional equations among these integrals and sums, and their expressions by a known special function in several cases. This frame is also efficient to work on the spectral problems of a systems of linear differential equation, a spectral zeta function as generating functions, and a multiple zeta function as a sum. This work is a step to a post-hypergeometric systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	5,700,000	1,710,000	7,410,000
2008年度	5,600,000	1,680,000	7,280,000
2009年度	5,900,000	1,770,000	7,670,000
2010年度	5,700,000	1,710,000	7,410,000
年度			
総計	22,900,000	6,870,000	29,770,000

研究分野:代数解析学

科研費の分科・細目:基礎解析学

キーワード:表現論、特殊関数、超幾何関数

## 1. 研究開始当初の背景

特殊関数とリー群の表現論は古くからの関係が認識されていたが、アクセサリパラメータを持つ特殊関数の登場する例は少なく、その役割もはっきりしなかった。また、マラー測度や多重ゼータ値など積分で表される関数が解析数論でも活発に研究されていたが、それらとリー群の表

現論や微分方程式的な特殊関数の取り扱いとの関係ははっきりとしていなかった。本研究は、これらを「積分」という視点から横断的に見ることによって統合的理解を進めたいという動機を形にしたプロジェクトである。

## 2. 研究の目的

本研究では、(微分)方程式系の解析、(特殊)解の研究、表現論と調和解析への応用、という3つの視点から『リー群の表現論で決定的な役割をする関数はどのような特殊関数か』を説明することを目的とする。たとえば次のような課題を扱う。ベクトル値(多成分系)の微分方程式系を対象とし、その方程式系の分解を調べることでベクトル値の方程式系を解析する。より一般に方程式系の中の準同型ならびに表現の構成要素を合わせて調べる。非可換調和振動子のスペクトル問題をホインの微分方程式に応用し、アクセサリパラメータの決定に対する問題を研究する。固有状態(固有関数)や固有値、スペクトルゼータも特殊関数とみてその振る舞いを研究する。領域に実現される表現の関数空間の決定と分解、準同形写像の特殊関数による表示、漸近形など、調和解析を行うのに必要となる基本的な関数の振る舞いを決定する。これらは積分変換や超幾何関数の手法や経験にも基づくが、超幾何関数を越えて行くことを遠望している。

## 3. 研究の方法

項目6に挙げた研究分担者・連携研究者、ならびに項目4に挙げた研究協力者と研究組織を形成し、項目2に挙げた研究内容ごとに研究を進めた。微分方程式の代数解析的な取り扱い(D加群)ならびに、リー群の表現論とそこに現れる超幾何的な特殊関数に関しては研究代表者が主となって研究をリードし、過去の蓄積を生かして研究を進めた。解析数論、保型形式、組み合わせ論、多重対数関数や多重三角関数のような特殊関数に関してはそれぞれの専門家とチームを組み、共同で研究を行った。多くの場合、研究代表者の所属する大学(研究期間の前半は名古屋大学、後半は九州大学)で共同研究を行い、また、補助的に下記に挙げた研究集会の場を活用した。

上記の目的のために本研究費の一部を活用して下記の研究集会を主催あるいは共催し、研究成果の発表、研究連絡、ならびに専門的知識の提供に生かした。

- ①Representation theory, systems of differential equations and their related topics, 北大, 2007.7.2-6.
- ②Geometry and representations in Lie theory, 玉原, 2007.8.20-24.
- ③Sapporo Lectures on representations in Lie theory, An introduction and the beyond, 北大, 2007.8.27-31.
- ④アクセサリ・パラメーター研究会, 熊本大学, 2007.10.8-10.
- ⑤Zetas and limit laws, 沖縄コンベンションセンター, 2007.10.21-23.
- ⑥マラー測度研究集会, 東京工業大学理学

部数学教室, 2007.12.3-5.

- ⑦Combinatorics and Representation Theory, 第8回名古屋国際コンファレンス, 名大, 2008.9.1-5.
- ⑧表現論と非可換調和解析における新しい視点, 京都大学数理解析研究所, 2008.9.16-19.
- ⑨Zetas and limit laws, 沖縄コンベンションセンター, 宜野湾市, 2008.11.22-25.
- ⑩Differential equations and symmetric spaces, 東大駒場, 2009.1.13-16.
- ⑪「式と表現」2010.7.12-13.九大伊都キャンパス
- ⑫「微分方程式と剛性」2010.7.24-25.九大伊都キャンパス
- ⑬「冪零軌道と表現論」(NORTH 10) 2011.2.19-23.九大伊都キャンパス

## 4. 研究成果

落合とZunderiya Uganbayar(名古屋大学)との研究では、Gelfand型の変数超幾何微分方程式系の関口英子(東京大学)によって拡張されたものの研究を推し進めた。この方程式系は不定値ユニタリ群の既約表現をペンローズ変換で与えたときの特徴付けに関係するものであり、重複度有限性は小林理論(小林俊行、東京大学)の思想圏内にあるものであった。我々の研究では、非ホロミー系であるという関口の予想の解決(フルランクあるいは行列サイズが4以上の場合)、非ホロミー系であるにもかかわらず原点正則解の有限次元性の純微分方程式的根拠づけ、ならびに次元の組み合わせ的(Kostka数)表示とそれによる漸近評価の改良を与えた。有限次元性の根拠は小林理論と互いに他を含むものではなく、独立に興味深い。

伊吹山知義(大阪大学)、葛巻孝子(岐阜大学)との共同研究では、ジーゲル保形形式に働く定数係数の偏微分作用素の特殊関数的な表示を企図し、研究を進めた。柏原 Vergne の重複度自由の設定を活かし、変数分離の長い計算を経て、BC型のルート系に付随する球関数との関係づけが得られるというところまで一般の階数で導出した。論文投稿中である。

また、黒川信重(東京工業大学)との共同研究では、ヒルベルト行列の交代行列版の固有値分布を研究した。特殊な反自己共役な積分作用素と見ることで Dirac 作用素とも考えられる。対称行列版は良く研究されているが交代行列版は研究が少なく、しかし、むしろ、非自明な固有値の規則性が交代行列版に観察されることを指摘し、種々の予想を提唱した。将来の研究を促す点で意義あると考えている。

分担者の伊師は Graczyk(Angers 大学)と共同で、開凸錐に値をとる二次形式に付随するウィシャート分布の高次モーメントを計算する一般公式を得た。また、有界対称領域の Hua 多項式の一般化を有界等質領域について定義し、具

体的に計算することで、有界等質代表領域の正規化したベルグマン核の負ベキを領域上で積分した値はベキの変数の多項式の逆数になるという結果を得た。また、積分計算についてもベレーン解析の視点から有用な一般化が得られた。これは伊師と山路哲史、山盛厚伺(名古屋大学)の共同研究である。

多変数のマーラー測度は多変数多項式に対して多重トラス上の積分で与えられる数値であるが、多項式の族に対しては族のパラメータに関する関数と考えることができる。ただし、超幾何関数や球関数とは異なり、サイクル上の積分とはならない場合が多い。落合は黒川信重、M.Lalin との共同の研究で、マーラー測度の高次への拡張を考え、これらの母関数となるゼータ積分を導入した。高次のマーラー測度の計算できる例は少ないが、多重対数関数や一般超幾何関数の関係式を巧みに用いることにより、いくつかの例を与えた。また、多重ゼータ関数に関して落合は複数の研究を行った。井原健太郎とは、多重ゼータ「値」の線形関係式の対称性を研究し、重さが3の場合に重シャッフル関係式の空間がワイル群の対称性を持つことを示した。また、松本耕二、中村隆、津村博文と共同で、多重ゼータ「関数」のうち Mordell-Tornheim 型と呼ばれるものに対して、線形関係式と解析接続における特異性の位置を考察した。その他、積分で表わされる特殊関数として、階数2のルート系に付随したベッセル関数のある種の拡張を考えた。

西山享(青山学院大学)との共同研究では、群の多重旗多様体の理論を、球部分群の設定に拡張する試みを開始し、軌道の個数の有限性を保証する原理・条件を複数発見した。これらの軌道は、表現の重複度や積分作用素で書かれるインタートワイニング作用素の核関数に関する情報のうち幾何学的部分を担っている。この仕事は既にモーメント写像に関する仕事(P.Trapa;ユタ大学)、軌道の具体的なパラメータ付けに関する仕事(松木敏彦、京都大学)を誘発した。黒川信重との共同研究では、無限対称群の元に付随したディリクレ級数型の母関数の解析接続や特殊値に関する以前よりも詳しい研究を行った。絶対体上の有限型概形とのつながりを考察し、積分(幾何学的には写像による直像)としての意味を追求した。比較的新しい対象としては、アルファ行列式の正值性を与えるパラメータ領域に関する予想を半分解いた。予想の動機は確率論にあるが、ここではそこから離れ、対称錐に於ける積分の理論を援用してアルファ行列式を特殊な場合に一般超幾何関数を用いて書き切った。これは今までになされていなかったものである。さらにその応用として、正值性のための必要条件を導くことに成功した。また、研究協力者の伊師は、対称とは限らない等質有界領域の標準的な表現形式を与えた。この研究は分類、ルート分解、相対不変式の記述、ガンマ積分の計

算など様々に有用となるものである。

なお、研究の途中で、連携研究者の制度ができたことや、落合が所属を名古屋大学から九州大学に異動したことを反映し、研究組織の変更を適宜行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

- ①Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai, Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits, *Journal of Lie Theory*, 21 (2011), 79--99. 査読あり
- ②Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai, Zeta functions and Casimir energies on infinite symmetric groups II, in *Casimir Force, Casimir operators and Riemann hypothesis*, 2010, de Gruyter, 57--63. 査読あり
- ③Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai, A multivariable Euler product of Igusa type and its applications, *Journal of Number Theory*, 129, Issue 8, August (2009) 1919--1930. 査読あり
- ④Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai, Spectra of alternating Hilbert operators, *Contemporary Mathematics* 484 (2009) Spectral Analysis in Geometry and Number Theory, 89--101, 査読あり.
- ⑤ Nobushige Kurokawa, Matilde Lalin and Hiroyuki Ochiai, Higher Mahler measures and zeta functions, *Acta Arithmetica* 135 (2008) 269--297, 査読あり.
- ⑥Kentarō Ihara and Hiroyuki Ochiai, Symmetry on linear relations for multiple zeta values, *Nagoya Mathematical Journal* 189 (2008) 49--62, 査読あり.
- ⑦ Hiroyuki Ochiai, A special value of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillators, *The Ramanujan Journal* 15 (2008) 31--36, 査読あり.
- ⑧ Kohji Matsumoto, Takashi Nakamura, Hiroyuki Ochiai and Hirofumi Tsumura, On value-relations, functional relations and singularities of Mordell-Tornheim and related triple zeta-functions, *Acta Arithmetica* 132 (2008) 99--125. 査読あり
- ⑨Kurokawa, Nobushige; Ochiai, Hiroyuki, Zeta functions and Casimir energies on infinite symmetric groups. *Comment. Math. Univ. St. Pauli* 56 (2007), no. 1, 11--25. 査読あり
- ⑩ Kurokawa, Nobushige; Ochiai, Hiroyuki, Generalized Kinkelin's formulas. *Kodai Math. J.* 30 (2007), no. 2, 195--212. 査読あり
- ⑪ Michihiko Fujii and Hiroyuki Ochiai, An

expression of harmonic vector fields on hyperbolic 3-cone-manifolds in terms of hypergeometric functions, Publ. RIMS. 43(2007) no.3, 727-761, 査読あり.

[学会発表] (計 26 件)

- ① Hiroyuki Ochiai, Zeros of Witten zeta functions and absolute limits, "Noncommutative Geometry and Arithmetic", Johns Hopkins University, 日米数学研究所、米国, March 22--25, 2011.
- ② Hiroyuki Ochiai, Positivity of an alpha determinant, "Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces", 2010.11.22--26 Lorentz Center, Leiden University, オランダ.
- ③ Hiroyuki Ochiai, Zetas as a state sum, "Zetas and Limit Laws in OKINAWA 2010", Nov 6--9, Festone and Okinawa convention center, 宜野湾市.
- ④ Hiroyuki Ochiai, 状態和としての多重ゼータ値, RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」2010.9.6--9, 京都大学数理解析研究所.
- ⑤ Hiroyuki Ochiai, アルファ行列式の正值性について, RIMS 研究集会「等質空間と非可換調和解析」2010.6.14--17, 京都大学数理解析研究所. 報告は、数理解析研究所講究録 1722 (2010) 154--166.
- ⑥ Hiroyuki Ochiai, Invariant hyperfunctions on some semisimple symmetric space, International conference on representation theory and harmonic analysis, 2010.6.6--11, Chern Institute of Mathematics in Nankai, 天津, 中国.
- ⑦ 落合啓之, Polynomial differential operators acting on automorphic forms, I, II, Workshop on Invariant Theory and Related Topics, Inha University, Korea, 2010. 2.17 and 2.19.
- ⑧ Hiroyuki Ochiai, Invariant distributions, a survey, 2009 年度表現論ワークショップ, 鳥取市、とりぎん文化会館, 2009. 12. 25--27.
- ⑨ 落合啓之, Invariant hyperfunctions on some semisimple symmetric spaces, Workshop on Harmonic Analysis and Invariant Distributions, National University of Singapore, 2009. 12. 16.
- ⑩ 落合啓之, Zeta functions and Casimir energies on infinite symmetric groups, 研究集会 Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, 2009. 11.9, 九州大学西新プラザ.
- ⑪ Hiroyuki Ochiai, Orbits on products of flag varieties, The 8th workshop on nilpotent orbits and representation theory (NORTH 8), 2009. 3.10, 滋賀雄琴.
- ⑫ 落合啓之, An algebraic transformation of Gauss hypergeometric function, 研究集会

Differential equations and symmetric spaces, 東京大学数理科学研究科 2009. 1. 16.

- ⑬ Hiroyuki Ochiai, ガウスの超幾何関数の変換公式について, 2008 年度表現論ワークショップ, とりぎん文化会館, 鳥取, 2008.12.26.
- ⑭ Hiroyuki Ochiai, Mahler measures and hypergeometric functions, Zetas and limit laws, 2008.11.22, 沖縄コンベンションセンター.
- ⑮ Hiroyuki Ochiai, Invitation to Atlas combinatorics, 研究集会「組合せ論的表現論の拡がり」, 京都大学数理解析研究所, 2008.10.10, 数理解析研究所講究録 1647 (2009) 163--177
- ⑯ 落合啓之, Wreath determinant and cross ratio, 日露ワークショップ Harmonic analysis on homogeneous spaces and quantization, 東京大学玉原数学研究所 2008.8.29.
- ⑰ 落合啓之, リーマンゼータの行列式表示(after Ralf Meyer). 研究集会『ゼータ関数の行列式表示とその応用』東京工業大学理工学部, 2008.3.27-28.
- ⑱ 落合啓之, あるベキ零的群作用に対する不変式環, 2007 年度表現論ワークショップ, 名大 2007.12.25-27.
- ⑲ 落合啓之, Gamma functions of  $G_2$ , "Zetas and Limit Laws", 沖縄コンベンションセンター, 2007.10.23.
- ⑳ 落合啓之,  $G_2$  のガンマ関数, アクセサリー・パラメーター研究会, 熊本大学 2007.10.10.
- ㉑ 落合啓之, 交代ヒルベルト作用素のスペクトル, 談話会, 東北大 2007.10.1
- ㉒ 落合啓之, 軌道分解と folding, 木村達雄先生還暦記念研究集会, つくば国際会議場小会議室, 2007.8.24-25
- ㉓ 落合啓之, A remark on combinatorics of  $K$ -orbits on  $G=B$ , "Geometry and Representations in Lie Theory", 東京大学玉原国際セミナーハウス 2007.8.21.

[その他]

ホームページ

<http://user.math.kyushu-u.ac.jp/index.php?ochiai>

研究内容の社会への情報発信:

- ①「5次方程式と微分方程式」数理科学, 2011年3月号、サイエンス社、雑誌記事。
- ②「それからどうなった」『日本の現代数学』に収録、数学書房, ISBN978-4-903342-17-7.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

落合 啓之 (OCHIAI HIROYUKI)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号: 90214163

(2)研究分担者

伊師 英之 (ISHI HIDEYUKI)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号:00326068

(3)連携研究者

大島 利雄 (OSHIMA TOSHIO)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号:50011721  
小林 俊行 (KOBAYASHI TOSHIYUKI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号:80201490  
若山 正人 (WAKAYAMA MASATO)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号:40201149