

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2007～2010

課題番号：19204012

研究課題名 (和文) 非線形波動・分散型方程式の幾何学的対称性と解の構造

研究課題名 (英文) Relations between properties of solutions and geometric symmetry for nonlinear wave and dispersive equations

研究代表者

堤 誉志雄 (TSUTSUMI YOSHIO)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10180027

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：函数方程式論, 函数解析学, 実関数論, 非線形波動・分散型方程式, 数理物理学

1. 研究計画の概要

最近の研究により、非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の特異性あるいは解の時刻無限大での漸近挙動の間に、密接な関係があることが様々な方程式で確認されている。この点に着目し、非線形波動・分散型方程式に対し、方程式の幾何学的対称性と解の構造の関係を調べ、背後にある原理を探ることを目的とする。具体的には、以下の3つの研究を主に行うことを目標とする。

(1) 解の正則性・特異性と方程式の幾何学的対称性との関係を調べる。

(2) 解の時刻無限大での漸近挙動と方程式の幾何学的対称性との関係を調べる。

(3) 特に、方程式のスケール不変性の果たす役割の精密な解析を行う。

2. 研究の進捗状況

非線形発展方程式の初期値問題に対する、解の存在と一意性は最も基本的な問題である。これらに対し、以下のような研究成果を得た。

(1) 解の一意性の概念は、大雑把に言って二つに分けられる。一つは無条件一意性とよばれるもので、方程式が意味を持つための最も広いクラスに属する解の一意性である。もう一つは、条件一意性とよばれるもので、多くの場合解の存在定理を証明するためには条件を解に付加することが必要なため、それに対応した一意性のことである。無条件一意性は、解の存在証明に依存しない一意性定理であるという点で重要である。

今回、空間5次元でゲージ不変な2次の非

線形性を持つ非線形シュレディンガー方程式を考え、指数 $1/2$ のソボレフ空間に属する解の一意性について無条件一意性を示した。このケースは、いわゆるスケール不変な問題に相当し、多くの場合初期値問題の適切性が成立するか否かの境目になると予想されている。さらに、ゲージ不変な2次の非線形性は2階微分が連続ではないため、スケール不変なケースの中でも、数学的にきわめて興味深い問題であった。

(2) 周期境界条件下で修正 KdV 方程式の初期値問題に対し、解の存在を研究した。2乗可積分関数のソボレフ空間に基づいた研究は、1993年に Bourgain がソボレフ空間の滑らかさを示す指数 s に対し、 $s > 1/2$ なら初期値問題は適切となることを示した。このときの彼の証明方法はフーリエ制限法とよばれ、線形解からのずれを精密に測る関数空間を設定したのが要点であった。2004年に高岡-堤は、このフーリエ制限ノルムに非線形項の相互作用を考慮した項を加えることにより、 $s > 3/8$ までソボレフ空間の指数 (すなわち、関数の滑らかさ) を下げることができることを示した。今回は、適切性を示すことはできなかったが、解の存在は $s > 1/4$ で証明することに成功した。この証明では、mKdV の完全可積分性は使っておらず、他の非線形分散型方程式への応用も期待される。

3. 現在までの達成度

概ね順調に進展している。

理由：非線形分散型方程式の典型例である、

非線形シュレディンガー方程式や修正 KdV 方程式に対し、スケール不変なソボレフ空間において無条件一意性を解明したり、線形解からのずれを測ることによって、より広いクラスで解の存在を証明することに成功した。これらのことから、研究は順調に進展していると言える。

4. 今後の研究の推進方策

現在まで、解の存在と一意性の問題に関する研究は順調に進展しているため、初期の研究計画を大きく変更する理由はないと思われる。しかし、解の漸近挙動については、必ずしも大きな成果が得られていないため、今後この方面の研究をどのように進めるかは、大きな課題である。空洞共振器の数理モデル方程式である Lugiato-Lefever 方程式は、減衰項と定数外力が付いた非線形シュレディンガー方程式であり、様々な空間パターンを持つ解が存在すると予想されている。この方程式の、解の漸近挙動を調べるのは興味深いと思われる。すでに、ある種の定常解の存在定理は得ているため、これからはこれら定常解の安定性・不安定性解析を推進する予定である。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition, *Disr. Cont. Dynam. Syst.*, 査読有り, (2010), 掲載確定.

② S. Ibrahim, M. Mohamed, N. Masmoudi and K. Nakanishi, Scattering for the two-dimensional energy-critical wave equation, *Duke Math. J.*, 査読有り, 150(2009), 287-329.

③ Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka and P. Pilarczyk, A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 査読有り, 8(2009), 757-789.

④ Yin Yin Su Win and Y. Tsutsumi, Unconditional uniqueness of solution for the Cauchy problem of the nonlinear Schrödinger equation, *Hokkaido Math. J.*, 査読有り, 37(2008), 839-859.

[学会発表] (計 1 件)

① Y. Tsutsumi, Unconditional uniqueness of solution for the Cauchy problem of nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinear*

Hyperbolic Equations and Related Topics, 2007 年 9 月 6 日, ピザ大学(イタリア).

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]