

機関番号：12501

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340002

研究課題名（和文） 有限単純群を自己同型群に持つ代数構造・組合せ構造の研究

研究課題名（英文） Study on algebraic or combinatorial structures whose automorphism groups contain finite simple groups

研究代表者

北詰正顕 (KITAZUME MASAOKI)

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60204898

研究成果の概要（和文）：

有限単純群を自己同型群として持つような、代数構造と組合せ構造についての研究を行った。

(1)有限可移置換群の位数2の元の固定点が生成する符号とその双対符号について研究し、ホール・ヤンコーの群、ラドヴァリスの群が作用する、新しい自己双対符号を構成した。

(2)散在型単純群（特に、HJ, Suz,  $M_{24}$ ）と関連するランク3グラフについて研究し、デザインを用いた新しい構成を与えた。(3)与えられたニーマイア格子がリーチ格子の  $m$ -近傍になるような  $m$  の最小値を決定した。

研究成果の概要（英文）：

We have studied some algebraic structures and combinatorial structures whose automorphism groups contain finite simple groups.

(1) We have studied the binary code spanned by the sets of fixed points of the involutions of a finite transitive permutation group and its dual code. New self-dual codes invariant under the Hall-Janko group and the Rudvalis group have been constructed, respectively.

(2) We have studied rank 3 graphs related to some sporadic simple groups (especially, HJ, Suz,  $M_{24}$ ). New constructions of these rank 3 graphs from some designs have been obtained.(3) We have determined the minimum value  $m$  such that a given Niemeier lattice is a  $m$ -neighbor of the Leech lattice.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
年度			
2007年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2008年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2009年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2010年度	1,900,000	570,000	2,470,000
総計	8,000,000	2,400,000	10,400,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限群，符号，デザイン，グラフ

1. 研究開始当初の背景

研究代表者による、過去の科学研究費補助金による研究においては、特に平成12-14年度、および、平成15-18年度に採択された

「有限単純群と符号・格子・頂点作用素代数」という研究課題の元で、有限単純群を自己同型群に持つような代数構造について、その相互関連を重視しながら、さまざまな成果を上

げてきた。そのような中で、符号の研究に於ける置換群論の視点からの研究成果や、符号や格子とも関連するグラフについての研究成果が得られるようになっていた。そのような背景の元、代数構造に加え組合せ構造をも視野に入れた研究を開始することとなった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、代数構造（符号・格子・頂点作用素代数）、および、組合せ構造（グラフ・デザイン）について、これらの相互の関連を重視しながら研究することを通して、新しい、もしくは既知の重要な、代数構造・組合せ構造の構成（または、その簡易化）を与えること。さらに、その結果として、自己同型群として得られる有限単純群の構成（または、その簡易化）や、群の性質の研究に貢献することである。

本研究では、特に、現れる単純群が散在型である場合を重視している。当面の具体的な目標として、下記の3点について、理論的考察と計算機による計算を交えながら研究を進めることとした。

(1) 与えられた有限可移置換群に対し、その群作用で不変な自己双対・自己直交符号の構成について研究する。その構成を通して、符号自身や、その自己同型群の性質について考える。

(2) 強正則グラフ（特に、ランク3グラフ）について、デザインなどの組合せ構造との関連を調べながら、グラフの構成や自己同型群の性質等を考える。当面は、最大部分空グラフから作られるデザインについて考える。

(3) Niemeier lattice と Leech lattice の関係（埋め込みや隣接関係）の決定、および、その応用について考える。

## 3. 研究の方法

本研究に於いては、研究代表者が中心となり、連携研究者、および、千葉大学の大学院生を中心とした研究協力者と、密接な連絡を取りながら、理論的考察と計算機による実証などを組合せながら議論を進めてゆくことが、重要な位置を占める。特に、有限群論全般については、野澤・越谷・澤辺、頂点作用素代数については、山田・安部、符号やデザインについては、宗政・原田・千吉良などの連携研究者との議論が有効であったほか、グラフとデザインについては、中空大幸・堀口直之・井上浩一などの研究協力・研究補助が重要であった。計算機による計算は、主に、GAPやMAGMAなどの群や組合せ構造の計算に強いパッケージソフトウェアを用いて、符号・デザイン・グラフの構成と、そのパラメータや自己同型群の計算などを行った。これについては、主に、原田・千吉良との連携を中心として、大学院生による研究補

助が重要な役割を果たしている。

## 4. 研究成果

有限単純群が作用するような、代数構造と組合せ構造について、特に、符号や格子、あるいは、グラフやデザインをキーワードとして、それらの相互の関係を重視しながら、研究を進めていった。その主な成果を下記にまとめておく。

(1) 有限可移置換群の位数2の元の固定点の集合が生成する符号、および、その双対符号についての研究を、連携研究者である原田・千吉良との共同研究として進めた。この研究は、前年度までの研究の中で、特に進展していたものである。

(1.1) この研究の出発点でもある重要な例として、Hall-Janko の単純群 HJ が作用する長さ100の（新しい）自己双対符号の構成について、9元体上のユニタリ空間を用いて、極力計算機を必要としないような記述を与えた。

(1.2) 計算の困難さもあって、取り残されていた場合として、次数の大きな置換群に対する計算を試みた。その結果、Rudvalis の単純群が作用する4060次の置換表現から、ちょうど3つの自己双対符号が得られることがわかった。これら3つの自己双対符号の性質を調べるため、それぞれの生成系を求め、置換群論的にどのような集合になっているかを調べた。また、部分符号として得られる28次元の部分空間におけるRudvalis 群による軌道を計算し、その代表系を調べ、多くが極大部分群と対応していることを確認した。この結果については、研究集会で発表した。一方で、生成系の特徴付けなど、まだ解析が不十分な点も多く、今後の研究への課題となっている。

(2) 散在型単純群のランク3の置換表現から得られるランク3グラフについて、関連するデザインや幾何構造を用いて性質や構成法を考えるとという研究を進めた。これは主に、堀口直之（千葉大学研究生）、中空大幸（岡山大学博士研究員）の研究協力から始まったものである。

(2.1) この研究の出発点である Hall-Janko graph について、10次のWitt system、および、4元体上の符号(hexacode)を用いた再構成を与えるという結果を完成させた。

(2.2) 散在型鈴木グラフの66点の最大部分空グラフの存在を示し、そこからユニタリ群が作用する新しい3-デザインができることを示した。この3-デザインについては、A. E. Brouwer 氏の研究協力を得て、具体的な

簡潔な構成を与えることが出来た。さらに、その3デザインを用いて、散在型鈴木グラフの新しい構成を与えた。

(2.3) 長さ24の ternary code から構成される5デザインが、Mathieu群の拡大である  $2^{11}:M_{24}$  という形の群に対する1024次のランク3グラフの最大空グラフのデザインとして与えられるという事実を発見した。上記の結果と同様に、デザインを用いたグラフの新しい構成を与えた。

(2.4) 井上浩一(千葉大学博士課程)、吉田翔(千葉大学修士課程)の研究協力の下で、Conway群が作用する276点上のtwo-graphと、McLaughlin群が作用するランク3グラフの構成について、研究を行った。その結果、Conway群のいくつかの極大部分群を用いたグラフの新しい記述を与えることに成功した。21点上のSteiner systemを用いるものと、Hoffman-Singleton graphを用いるものである。これについては、論文として準備中である。

(2.5) Cameron-RudvalisによるFischer群  $F_{22}$  が作用するデザインと幾何について、その群論的な立場からの考察を行った。その結果、より大きなFischer群  $F_{24}$  を用いて、その3-transpositionの共役類を用いた記述を与えることに成功し、Cameron-Rudvalisの論文で計算機を用いて与えられていた、デザインと幾何の数々のパラメータを、群論的に計算することが出来ることを示した。これにより、幾何の部分空間についても、群論的な解釈が可能になることがわかった。この結果については、論文として準備中である。

(3) Leech lattice と Niemeier lattice の関係を考える上で、どのように近傍(neighbor)の関係にあるか、という問題について研究を進めた。その結果、それぞれのNiemeier lattice について Leech lattice の  $m$ -neighbor となるような  $m$  の最小値を決定した。これは、Leech lattice の様々な構成法とも関係する結果であり、研究集会において発表した上で、論文として準備中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① N. Horiguchi, M. Kitazume and H. Nakasora, On the maximum coclique of the rank 3 graph of  $2^{11}:M_{24}$ , Journal of Combinatorial Designs, 17, 323-332, 2009, 査読有.

② A. E. Brouwer, N. Horiguchi, M. Kitazume,

and H. Nakasora, A construction of the sporadic Suzuki graph from  $U_3(4)$ , Journal of Combinatorial Theory (A), 116, 1009-1096, 2009, 査読有.

③ N. Horiguchi, M. Kitazume and H. Nakasora, The Hall-Janko graph and the Witt system  $W_{10}$ , European Journal of Combinatorics, 29, 1-8, 2008, 査読有.

④ N. Chigira, M. Kitazume and M. Harada, Some Self-Dual Codes Invariant under the Hall-Janko Group, Journal of Algebra, 316, 578-590, 2007, 査読有.

[学会発表] (計6件)

① 北詰正顕, Co\_3 をめぐって, 第22回有限群論草津セミナー, 2010年8月, 草津セミナーハウス

② 北詰正顕, Neighbors of the Leech lattice, ミニ集会「代数的組合せ論」, 2010年3月, 神戸学院大学

③ 北詰正顕, 散在型単純群の周辺, 第53回代数学シンポジウム, 2009年8月, 盛岡市.

④ 北詰正顕, 単純群論の最近の話題とこれからの課題, 第21回有限群論草津セミナー, 2009年8月, 草津セミナーハウス

⑤ 北詰正顕, Dickson の  $E_6(q)$ , 第20回有限群論草津セミナー, 2008年8月, 草津セミナーハウス

⑥ 北詰正顕, Hall Janko graph について, 第19回有限群論草津セミナー, 2007年8月, 草津セミナーハウス

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~kitazume/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

北詰正顕 (KITAZUME MASAOKI)  
千葉大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:60204898

### (2) 研究分担者

野澤宗平 (NOZAWA SOHEI)  
千葉大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:20092038  
(H19→H20:連携研究者)

越谷重夫 (KOSHITANI SHIGEO)  
千葉大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:30125926  
(H19→H20:連携研究者)

澤辺正人 (SAWABE MASATO)  
千葉大学・教育学部・准教授  
研究者番号:60346624  
(H19→H20:連携研究者)

杉山健一 (SUGIYAMA KEN-ICHI)  
千葉大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:90206441  
(H19→H20:連携研究者)

安藤哲哉 (ANDO TETSUYA)  
千葉大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号:20184319  
(H19→H20:連携研究者)

山田裕理 (YAMADA HIROMICHI)  
一橋大学・大学院経済学研究科・教授  
研究者番号:50134888  
(H19→H20:連携研究者)

宗政昭弘 (MUNEMASA AKIHIRO)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号:50219862  
(H19→H20:連携研究者)

原田昌晃 (HARADA MASA AKI)  
山形大学・理学部・准教授  
研究者番号:90292408  
(H19→H20:連携研究者)

千吉良直紀 (CHIGIRA NAOKI)  
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授  
研究者番号:40292078  
(H19→H20:連携研究者)

(3) 連携研究者

安部利之 (ABE THOSHIYUKI)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号:30380215  
(H22)