

機関番号：12608

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340004

研究課題名（和文） 特殊函数の現代的発展—表現論と複素積分からのアプローチ

研究課題名（英文） Recent development of special functions from the viewpoint of representation theory and integrals of complex variables

研究代表者

三町 勝久 (MIMACHI KATSUHISA)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：40211594

研究成果の概要（和文）：

共形場理論にも現れる、ある Selberg 型積分についての、接続問題を解いた。その接続係数は q -Racah 多項式という直交多項式による表示をもつことが示された。これとは別に、線形微分方程式の解の接続問題が、ねじれホモロジーの交叉数の計算とある種の定積分の計算に帰着できるということを発見し、一般超幾何函数の場合に具体的に実行してみせた。また、Jones 多項式を Selberg 型積分に付随するねじれホモロジーの交叉数を用いて定式化し、いくつかの代表的なノットについての具体的表示を導いた。

研究成果の概要（英文）：

We solve a connection problem associated with an integral of Selberg type, which appears in conformal field theory as a conformal block. The coefficients are expressed by the q -Racah polynomials, which consist of a family of orthogonal polynomials. On the other hand, we find a general framework that the connection problem is reduced to determining the intersection numbers of the associated twisted cycles. Indeed, we use this framework to solve the problem in the case of the generalized hypergeometric function. Moreover, we give a definition of the Jones polynomials in terms of intersection numbers of twisted cycles and derive explicit expressions of the Jones polynomials for some knots.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2008年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2009年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2010年度	3,000,000	900,000	3,900,000
年度			
総計	12,500,000	3,750,000	16,250,000

研究分野：代数解析

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ねじれホモロジー、積分表示、接続問題、超幾何函数、交叉数、モノドロミー、ジョーンズ多項式、ヘッケ代数

1. 研究開始当初の背景

複素積分とは、青本和彦（名大名誉教授）らが精力的に研究したものであり、積分を捩れコホモロジーと捩れホモロジーとのペアリ

ングと見なすことにより、積分の構造解析に、複素解析的の微分方程式論、代数幾何、複素解析幾何、位相幾何等の諸理論を応用するものである。この方法論はいわゆる q 類似の場合

にも適用される. この視点から, KZ 方程式の解などとして現れる Selberg 型積分 (差積の複素冪を被積分函数にもつ) の構造を調べることに, 特に, A 型ルート系に付随した超幾何函数の積分表示を深く理解することは, それまでの中心課題であり, 幾つかの成果が得られていた. そのひとつとして, 振れホモロジーの空間上に岩堀-Hecke 代数の既約表現を構成し, Lawrence が 1990 年に提出した予想を解決した結果があるが, これはホモロジーのジェネリシティー条件の崩れる場合に生じる部分空間を旨く取り出すことにより実現されたものである. 代数幾何学・位相幾何学そして微分方程式論の専門家が避けてきた場合の重要性が浮かび上がってきた. このようなことから, ジェネリシティー条件の崩れる場合 = 共鳴条件 (resonance condition) を満たす場合の研究が多変数の超幾何函数および球函数の解明に必要不可欠であるという認識がされるようになってきていた.

2. 研究の目的

Gauss の超幾何函数の良い多変数化に向けて, ルート系に付随する超幾何函数と複素積分の二つのながれを統一的に把握するのが本研究の究極の目的である. より具体的なテーマを箇条書きにすると, 以下の通りである.

(1) 複素積分 (局所係数の de Rham 理論): 複素積分は de Rham コホモロジーと振れホモロジーとの双対であると見なす視点に立ち, 主に Selberg 型積分を例にとり複素積分の構造を調べる. 特に, 被積分函数の特異因子 (divisor) や指数 (exponent) が退化した場合の振れホモロジーの基礎的研究に焦点を当てる.

(2) Hecke 環・量子群などの表現: Birman-Wenzl-Murakami 代数, B, C, D 型ルート系に対する Hecke 代数そして量子群など, さまざまな代数系の表現の振れ (コ) ホモロジーの上での実現を試みる.

(3) 位相不変量への応用: Jones 多項式などを振れホモロジーの立場から理解する.

(4) 数論への応用: KZ 方程式からくるモノドロミー表現と多重ゼータ値との関連を積分表示の視点から明らかにする.

(5) 数理物理への応用: 共形場理論における物理的相関函数や, Calogero-Sutherland 系などの量子多体系や XXZ 模型の相関函数などを理解する.

3. 研究の方法

(1) 複素積分の立場からのド・ラーム理論の研究はセルバーグ型積分を具体例に採り

あげて, その指数がジェネリシティー条件を外れる場合に, 振れ (コ) ホモロジーの消滅・非消滅の条件, 各次元の決定, 局所有限なサイクルによるホモロジーと有限なサイクルによるホモロジーの比較をする. さらに, このときに生じる核の分析や, 正則化可能サイクルの空間における旨い基底の発見交差数の明示的表示などを得る.

(2) Felder-Wieczerkowski により Selberg 型積分に付随した局所係数のホモロジー群におけるパスの族への量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用が考察されていたのは 90 年代初頭であったが, 数学的には不満足なものであったので, これを機会に, きちんと定式化する.

(3) 振れサイクル上に Birman-Wenzl-Murakami 代数や B, C, D 型のヘッケ代数の表現を実現する. そして, それらの既約性を明らかにする.

(4) Jones 多項式のような量子不変量と振れホモロジーとの関係を調べるために, まずは, Bigelow による位相不変量の研究を分析する.

4. 研究成果

(1) Selberg 型積分の常微分方程式の解に対応する場合 ($\mathfrak{su}(2)$ 共形場理論における 4 点函数の共形ブロックに現われるもの) に, 付随する接続問題を解いた. その接続係数は q Racah 多項式 (または q^{6-j} シンボルといっても同じ) による表示をもつ. 接続行列のユニタリ性から q Racah 多項式の選点直交性が自然に従う.

(2) 局所係数のホモロジー (ねじれホモロジー) の理論の進展を踏まえ, ホモロジーの反対称成分への作用を具体的に決めることにより, 局所係数のホモロジー群におけるパスの族への量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用をきちんと定式化した.

(3) リンクの不変量であるジョーンズ多項式をセルバーグ型積分に付随する振れホモロジーの交叉数を用いることにより定式化した. そして, この定式化によって, 2ブリッジノット, トーラスノットの 3 本線の場合, プレッツルの特別な場合に, ジョーンズ多項式の具体的表示を導いた.

(4) 微分方程式の解の接続問題が, 解の表示に用いられる多価正則函数により定義され

るねじれホモロジーの交叉数の計算と、解の特殊値を表す定積分の計算に帰着されるということがわかった。そして、この枠組みにより、一般超幾何函数の場合に、具体的計算を行った。

(5) Even 4と呼ばれる確定特異点型常微分方程式の解の接続問題を原岡喜重(熊大・自然)との共同研究により解いた。

(6) アクセサリー・パラメタの無いフックス型微分方程式において、横山利章(千葉工大)の分類したリストは、系統的に議論できる数少ない例になっている。代表者は、この系列のすべてに対して、解の積分表示を与えることに成功した。その際、いくつかの系列を統合する、新しい微分方程式を構成するという発展もあった。

(7) ガウスの超幾何函数に付随するモノドロミー群の研究は古典的なものであって、多くの成果が得られているが、いろいろな意味でのgenericity条件から外れる場合の考察は、不十分なものであった。このような状況に鑑み、積分表示解からの観点からの研究を行った。具体的には、被積分函数の指数を使った共鳴条件の決定、表現の既約性の必要十分条件の決定、共鳴条件下(=可約表現の場合)でのモノドロミー表現の具体的実現、可約表現が有限群になる場合の分類を行った。

また、これをきっかけに、指数がいかなる場合であっても積分表示解で議論できるという状況を整えるためには、積分域が、輪体だけでなく、輪体とはならないチェーンをも取り込む必要があることが明確になったのであるが、ホモロジー・コホモロジーでは捉えきれない場合があるということが明らかになったことは、意義深いと思われる。そして、そのようなものも込めて、あらためて、ガウスの微分方程式の積分表示解をいかに得るかという基本的問題を解決した。この研究は、佐々木武(神戸大名誉教授)との共同研究によるものであるが、ガウスの超幾何函数を一般化した、アッペルの F_1 超幾何函数(2変数函数)についても、同様な結果を得たし、さらにLauricellaの F_D 超幾何函数(n 変数)の場合にも、モノドロミー表現が既約になることの必要十分条件を決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① K.Mimachi, The connection problem associated with a Selberg type integral and the q -Racah polynomials, Forum Mathematicum, 掲載予定, 査読有り.
- ② K.Mimachi and Yoshishige Haraoka, A connection problem for Simposon's even family of rank four, Funkt. Ekvac., 掲載予定, 査読有り.
- ③ K.Mimachi, Solutions for some families of Fuchsian differential equations free from accessory parameters in terms of the integral, the Proceedings of the 2nd MSJ-SI "Arrangements of Hyperplanes" as a volume in the series of the Advanced Studies in Pure Mathematics, 掲載予定, 査読有り.
- ④ K.Mimachi, The Jones polynomial and the intersection numbers of twisted cycles associated with a Selberg type integral, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 20 (2011), 469-496, 査読有り.
- ⑤ K.Mimachi, Connection matrices associated with the generalized hypergeometric function ${}_3F_2$, Funkt. Ekvac., 51 (2008) 107-133, 査読有り.
- ⑥ Nobushige Kurokawa, K.Mimachi, Masato Wakayama, Jackson's integral of the Hurwitz zeta function, Rendiconti del circolo atematico di Palermo, 56 (2007), 43-56, 査読有り.
- ⑦ K.Mimachi, Masaaki Yoshida, Regularizable cycles associated with a Selberg-type integral under some resonance condition, Internat. Jour. Math. **18** (2007), 395-409, 査読有り.

[学会発表] (計11件)

- ① 三町勝久, 超幾何型函数のモノドロミー表現の既約条件, 超幾何方程式研究会2011(代表:高山信毅, 小池達也), 神戸大学, 2011.1.5-7.
- ② 三町勝久, Connection formulas of the

solutions of Fuchsian differential equations and intersection numbers of twisted cycles, International conference on Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, Lorentz center, Leiden, Netherlands, 2010. 11. 22-26.

- ③ 三町勝久, Twisted de Rham theory--resonances and the non-resonance, 研究集会「BC系とAGT予想の周辺」(代表: 白石潤一(東大), 野海正俊(神戸大), 山田裕二(立大)) 2010. 9. 11-14, 東大数理.
- ④ 三町勝久, Intersection numbers of twisted cycles and the connection problem for the Fuchsian differential equations, 超幾何方程式研究会2010(代表: 高山信毅), 神戸大学, 2010. 1. 5-7.
- ⑤ 三町勝久, Intersection numbers of twisted cycles and the connection problem for the Fuchsian differential equations, Univ. Aarhus, 2009. 12. 9-10, Workshop ``q-Representation theory.''
- ⑥ 三町勝久, Arrangements of hyperplanes and solutions of the Fuchsian differential equations free from accessory parameters, Mathematical Society of Japan Seasonal Institute 2009 on Arrangements of Hyperplanes, 2009. 8. 1-13, 北海道大学.
- ⑦ 三町勝久, Topics around the integrals related with the present workshop, Workshop on Accessory Paramaters, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市玉原高原), 2009. 6. 18--22, (世話人: 大島利雄(東大), 原岡喜重(熊大))
- ⑧ 三町勝久, 一般超幾何関数の接続公式, ねじれホモロジーの交叉数, 数理研短期共同「微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題」(代表: 木村弘信(熊本大)), 京都大学数理解析研究所, 2009. 2. 3-2. 6.
- ⑨ 三町勝久, セルバーグ型積分に付随するサイクルと量子群, 「第11回 代数群と量子群の表現論 研究集会」(プログラム責任者: 山田裕史(岡山大), 鈴木武史(岡山大)) 岡山県青年会館, 2008. 5. 25-28.

- ⑩ 三町勝久, The connection problem associated with a Selberg type integral and the q-Racah polynomials, 研究集会「超平面配置のさまざまな側面 (Several Aspects of Hyperplane Arrangements)」(世話人: 吉永正彦(神戸大学)), 神戸大・自然科学, 2008. 2. 4-2. 5.
- ⑪ 三町勝久, The connection problem associated with a Selberg type integral and the q-Racah polynomials, School on Algebraic Approach on Differential Equations, Bibliotheca Alexandrina, Alexandria, 2007. 11. 12-23, Egypt.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.titech.ac.jp/~mimachi/mimachi.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三町 勝久 (MIMACHI KATSUHISA)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 4 0 2 1 1 5 9 4

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

吉田 正章 (YOSHIDA MASAOKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 3 0 0 3 0 7 8 7

黒川 信重 (KUROKAWA NOBUSHIGE)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 7 0 1 1 4 8 6 6

高田 敏恵 (TAKATA TOSHIE)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 4 0 2 5 3 3 9 8