

平成 22 年 5 月 1 日現在

研究種目： 基盤研究(B)
 研究期間： 2007 ～ 2009
 課題番号： 19340005
 研究課題名（和文） 乗数イデアルと密着閉包の可換代数及び計算代数の視点からの研究
 研究課題名（英文） Research of multiplier ideals and tight closures from viewpoint
 of commutative algebra and computational algebra
 研究代表者
 吉田 健一 (Yoshida Ken-ichi)
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
 研究者番号： 80240802

研究成果の概要（和文）：研究代表者は、以前の研究で原伸生氏と共に、一般化された密着閉包の概念を導入し、乗数イデアルを可換環論の言葉で定義することに成功した。具体的には、乗数イデアルは、密着閉包のテストイデアルの標数に関する極限として得られる。本研究では、小さな標数のテストイデアルの振る舞いと乗数イデアルの振る舞いとの違いを明らかにした。さらに、可換環論におけるさまざまな不変量の研究を行うために、密着閉包の理論を整備した。

研究成果の概要（英文）： The leader of this research introduced the notion of a generalized tight closure and succeeded to redefine multiplier ideals in terms of commutative ring theory. Precisely speaking, the multiplier ideal is given as the limit of generalized test ideals. In this research, we found several differences between the behavior of test ideals and that of multiplier ideals. Moreover, we extended the theory of test ideals in order to study several invariants in the theory of commutative algebra.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2008 年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2009 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
年度			
年度			
総計	6,500,000	1,950,000	8,450,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：乗数イデアル、密着閉包、F 正則性、正則局所環、コーエン・マコーレー性、スタンレー・リースナー環、グラフ、算術的階数

1. 研究開始当初の背景

乗数イデアルの概念は、Nagel により解析的な視点から導入された概念である。その後、Lipman や Lazarsfeld により代数幾何学的に定式化され、Skoda の定理の精密化、

消滅定理の他、arc space の研究など最新の特異点論の研究にも現れる重要な概念である。一方、密着閉包の概念は、Hochster と Huneke により可換環論におけるホモロジカル予想の研究、不変式環の

Cohen-Macaulay 性の証明、Briançon・Skoda の定理の簡略化などを目標に導入された概念である。まだホモロジカル予想の解決はもたらししていないが、特異点を可換環論を用いて記述するという新たな視点をもたらした。研究代表者と原伸生と共に密着閉包の概念を拡張し、一般化されたテストイデアルを用いて、乗数イデアルの記述に成功した。しかしながら、テストイデアルの性質や構造については十分に理解されていないという状況であり、応用上もその性質の解明が重要である。

2. 研究の目的

(1)本研究の最初の目的は、一般化されたテストイデアルと乗数イデアルについて、両者の性質を比較し、共通点及び相違点を明らかにすることである。共通点としては、乗数イデアルは十分大きな標数に関するテストイデアルの還元として得られることが知られているが、小さな標数の場合にはどうであるかは明確にされていない。また、乗数イデアルが持つ種々の性質をテストイデアルが持つかどうかも明らかでない。この点を明らかにすることも重要な目的の1つである。F-pure threshold の研究なども関連した研究である。(2)本研究の2番目の目的は、一般化された密着閉包の理論を完成させることである。この理論は、研究代表者と原伸生氏により導入されたものであるが、その後も Vraciu, Blickle-Mustata-Smith, 高木俊輔らによりさまざまな形にアレンジされたものが導入され、研究が続けられている。問題点は、標準的ログ特異点の正標数における対応物を定義することが難しい点と、密着閉包の理論において局所化問題が難解である点があげられる。前者については、研究代表者の研究成果を修正することで Schwede らが研究を続けているが、本研究の目的からは除く。本研究では、後者の問題点に焦点をあて密着閉包の局所化問題を考える。関連して、Hilbert-Kunz 重複度、F 有理性を持つ環の研究などを行う。(3)本研究の3番目の目的は、乗数イデアルの計算代数の視点からの研究である。これは乗数イデアルに対応するテストイデアルの計算が困難であることを考慮して、その計算方法を模索することが主目的である。関連する研究として、単項式イデアルの研究者とも共同研究を行い、研究代表者の知見を高める。

3. 研究の方法

(1)乗数イデアルとテストイデアルの比較：乗数イデアルとテストイデアルの性質を比較するために、乗数イデアルの持つ自明な性質（例えば、整閉性）について、テストイデアルがその性質を有するかどうかを調べる。その際には、Lipman、渡辺敬一、Ein らの先

行する結果を参考にする。また、渡辺氏の主催する日大セミナーなどに積極的に参加することにより情報を入手する。また、Mustataらの所属するミシガン大学の研究会にも参加することにより最新の情報の収集に努め、成果発表を行う。

(2)密着閉包の理論の完成：平成20年度に予定されている研究代表者による明治大学での集中講義の準備を通じて、本理論の完成に欠かせない既存の理論の見直しを進める。特に、最近、Brenner・Monsky により与えられた密着閉包の局所化問題の反例を分析することで、理論の不備を理解することに努める。また、高木俊輔・高橋亮らに研究が進められたF有限表現型の研究と、密着閉包の局所化問題との関係を強化し、既存の結果を拡張する。

(3)計算代数の視点からの研究：正標数におけるテストイデアルの計算機による実現を長記目標に掲げて、当面は単項式イデアルの構造もしくは不変量(算術的階数の決定など)の研究を行う。この研究は上記の2つの研究をサポートする研究と位置づけて、分担者もしくは連携研究者の寺井直樹、研究協力者の木村杏子の研究を、研究代表者がサポートする。

4. 研究成果

(1)乗数イデアルとテストイデアル：研究代表者は、Mustata (ミシガン大学) との共同研究を通じて、正則局所環における勝手なイデアルがテストイデアルとして実現できることを証明し、研究成果として総合誌において発表した。この結果は乗数イデアルとテストイデアルの性質の違いを初めて明確にした結果であり、注目に値する。より広いクラスにおいて類似の結果が得られるかどうかは未解決であり、今後の研究目標としてあげられる。(1)に関連する研究として、対角的 F-threshold の研究を行った。代表者の指導の下で、RA で採用した学生が二項式で定義される超局面の F-threshold や2次の行列式で定義される行列式環の F-threshold を計算することに成功した。

(2)一般化された密着閉包の理論の完成：明治大学での集中講義を通じて、成果発表の準備は進んでいるが、本研究の研究期間内での研究成果は見送った。関連する研究として、Hilbert-Kunz 重複度の極小問題と、有限群による不変部分環の Hilbert-Kunz 重複度に関して新たな予想を提出し、部分的に解決した。また、一般化された密着閉包の理論の応用は、高木俊輔氏との共同研究においてなされた。

(3)計算代数の視点からの研究：乗数イデアルもしくはテストイデアルの計算という視点からは程遠い成果であるが、極小生成元の

個数と高さの差が小さい単項式イデアルを超グラフを用いて分類し、応用としてそのようなイデアルの算術的階数が射影次元に等しいことを証明し、論文として成果発表した。他に、局所的に完全交叉な単体的複体の構造定理を与え、応用として Cowsik-Nori の定理の精密化を得た。本研究は、単項式イデアルのべきと形式的べきの環論的性質の研究として行われていたが、我々の結果は高次元化への道を開く貴重な結果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 27 件)

- (1) M. Crupi, G. Rinaldo, Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, Effective Cowsik-Nori theorem for edge ideals, to appear in: Comm. in Algebra, 査読有.
- (2) M. Ohtani, K. Matsuda and Ken-ichi Yoshida, Diagonal F-thresholds on binomial hypersurfaces, to appear in: Comm. in Algebra, 査読有.
- (3) Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, Locally complete intersection of Stanley-Reisner ideals, Illinois J. Math 53, (2009), 413-429, 査読有.
- (4) M. Mustata and Ken-ichi Yoshida, Test ideals vs. multiplier ideals, Nagoya Math. J. Vol.193, (2009), 1-18, 査読有.
- (5) K. Kimura, Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, Arithmetical rank of squarefree monomial ideals with small arithmetic degree, J. Alg. Combinatorics Vol.29, (2009), 389-404, 査読有.
- (6) K. Kimura, Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, Arithmetical rank of monomial ideals of deviation two, in: Contemporary Mathematics Vol.502, (2009), 73-112, Combinatorial Aspects of Commutative Algebra (eds. V. Ene, E. Miller), 査読有.
- (7) Osamu Iyama, I. Reiten and J. Scott, Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035-1079, 査読有.
- (8) Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, A note on Cohen-Macaulayness of Stanley-Reisner rings with Serre's condition (S2), Comm. Algebra Vol.36, (2008), 464-477, 査読有.
- (9) Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, Cohen-Macaulayness for symbolic power ideals of edge ideals, 第31回可換環論シンポジウム報告集, (2009), 34-39, 査読無.
- (10) Mitsuyasu Hashimoto, F-purity of

homomorphism, strong F-regularity, and F-injectivity, 第31回可換環論シンポジウム報告集, (2009), 9-16, 査読無.

- (11) 吉田健一, ideal-adic tight closure of the localization, 第21回可換環論セミナー報告集, (2009), 1-8, 査読無.
- (12) 寺井直樹, 吉田健一, edge ideal of the Cohen-Macaulay 性について, 第21回可換環論セミナー報告集, (2009), 1-8, 査読無.
- (13) S. Takagi and Ken-ichi Yoshida, Generalized test ideals and symbolic powers, Michigan Math. J. Vol.57, (2008), 711-724, 査読有.
- (14) Mitsuyasu Hashimoto and M. Ohtani, Local cohomology on diagrams of schemes, Michigan Math. J. 57 (2008), 383-425, 査読有.
- (15) Mitsuyasu Hashimoto, Acyclicity of complexes of flat modules, Nagoya Math. J. 192 (2008), 111-118, 査読有.
- (16) Osamu Iyama, Auslander-Reiten theory revisited, Trends in representation theory of algebras and related topics, 349--397, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, (2008), 査読有.
- (17) Osamu Iyama and I. Reiten, Idun Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras, Amer. J. Math. 130 (2008), 1087-1149, 査読有.
- (18) I. Burban, Osamu Iyama, B. Keller and I. Reiten, Idun Cluster tilting for one-dimensional hypersurface singularities, Adv. Math. 217 (2008), 2443-2484, 査読有.
- (19) Osamu Iyama and Y. Yoshino, Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 117--168, 査読有.
- (20) S. Goto and Ken-ichi Yoshida, Buchsbaum homogeneous algebras with minimal multiplicity, J. Pure Appl. Alg. Vol. 210, (2007), 735-749, 査読有.
- (21) Mitsuyasu Hashimoto, Base change of invariant subrings, Nagoya Math. J. 186 (2007), 165-171, 査読有.
- (22) Z. Huang and Osamu Iyama, Auslander type conditions and cotorsion pairs, J. Algebra 318 (2007), 93-100, 査読有.
- (23) Osamu Iyama, Auslander correspondence, Adv. Math. 210 (2007), 51-82, 査読有.
- (24) Osamu Iyama, Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, Adv. Math. 210 (2007), 22-50, 査読有.

(25) Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida, Stanley-Reisner ideals which are complete intersection locally, 第 29 回可換環論シンポジウム報告集, (2007), 9-18, 査読無.

(26) 木村杏子, 寺井直樹, 吉田健一, Arithmetical rank of squarefree monomial ideals, Arc Spaces and Multiplier ideals, 数理解析研究所講究録 1562, (2007), 104-113, 査読無.

(27) 吉田健一, Ideal-adic tight closure and its applications, Arc Spaces and Multiplier ideals, 数理解析研究所講究録 1550, (2007), 64-88, 査読無.

[学会発表] (計 14 件)

(1) 寺井直樹, 吉田健一, squarefree monomial ideal のべきについて, 第 22 回可換環論セミナー, 2010 年 2 月 3 日, 松本市中央公民館

(2) 寺井直樹, 吉田健一, Cohen-Macaulayness for symbolic power ideals of edge ideals, 第 31 回可換環論シンポジウム, 2009 年 11 月 26 日, ホテルアウィーナ大阪(大阪府).

(3) 吉田健一, On Cowsik-Nori theorem for Stanley-Reisner ideals and edge ideals, 1 Prima Congress, 2009 年 7 月 6 日, University of New South Wales(シドニー, オーストラリア).

(4) 吉田健一, Small Hilbert-Kunz multiplicity and (A1)-type singularity, The 4th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, 2009 年 2 月 20 日, 明治大学理工学部(神奈川県).

(5) 吉田健一, ideal-adic tight closure の局所化について, 第 21 回可換環論セミナー, 2009 年 1 月 27 日, 釧路生涯学習センター(北海道).

(6) 寺井直樹, 吉田健一, edge ideal の中の Cohen-Macaulay 性について, 第 21 回可換環論セミナー, 2009 年 1 月 28 日, 釧路生涯学習センター(北海道).

(7) 吉田健一, Cohen-Macaulayness of symbolic powers of edge ideals of disjoint union of complete graphs, 日大セミナー, 2009 年 1 月 19 日, 日本大学文理学部(東京都).

(8) 木村杏子, 寺井直樹, 吉田健一, 算術次数がイニシャル次数より 2 だけ大きい squarefree monomial ideal の算術階数について, 日本数学会代数学分科会, 2008 年 3 月 24 日, 近畿大学(大阪府).

(9) 吉田健一, Some properties of generalized test ideals, International conference on Yokohama, 2008 年 3 月 18 日, 横浜開港記念会館(神奈川県).

(10) 木村杏子, 寺井直樹, 吉田健一, A note on Schmitt-Vogel lemma, 数理解析短期

共同研究「代数、言語のアルゴリズムと計算理論」2008 年 2 月 22 日, 京都大学数理解析研究所(京都府).

(11) 吉田健一, Asymptotic behavior of certain squarefree monomial ideals, The Third Japan Vietnam joint seminar, 2007 年 12 月 3 日, Institute of Mathematics (ハノイ, ベトナム).

(12) 寺井直樹, 吉田健一, Stanley-Reisner ideals which are complete intersections locally, 第 29 回可換環論シンポジウム, 2007 年 11 月 19 日, 愛知厚生年金会館(愛知県).

(13) 吉田健一, Any ideal in an F-finite RLR is a test ideal, 日本数学会代数学分科会, 2007 年 3 月 28 日, 埼玉大学理学部(埼玉県).

(14) 木村杏子, 寺井直樹, 吉田健一, arithmetical rank of squarefree monomial ideals, RIMS 共同研究 代数、形式言語。計算システム理論とその応用, 2007 年 2 月 20 日, 京都大学数理解析研究所(京都府).

[その他]

ホームページ等

<http://kenpro.mynu.jp:8001/Profiles/0004/0000497/profile.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田 健一 (Yoshida Ken-ichi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 80240802

(2) 研究分担者

橋本 光靖 (Hashimoto Mitsuyasu)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 10208465

伊山 修 (Iyama Osamu)
教授
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・研究者番号: 70347532

藤野 修 (Fujino Osamu)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 60324711

(3) 連携研究者

寺井 直樹 (Terai Naoki)
佐賀大学・文化教育学部・准教授
研究者番号: 90259862