様式Ｃ－１９

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　24年　5月　7日現在

機関番号：22604
研究種目：基盤研究Ｂ
研究期間：　2007～2010
課題番号：19340007
研究課題名（和文）　モジュライ空間の幾何学と無限可積分系への応用

研究課題名（英文）　Geometry of Moduli Spaces and its Application to Infinite Analysis

研究代表者
上野　健爾（UENO KENJI）
首都大学東京・大学院理工学研究科・研究員
研究者番号：40011655

研究成果の概要（和文）：土屋・山田・上野によって構成された複素単純リー代数をゲージ対称性に持つ共形場理論を使ってモジュラー函手を構成することができ、それによって3次元多様体の位相不変量を構成することができる(位相的場の理論)ことを、Joergen E. Andersen との共同研究で示していたが、リー代数が sl(n, C)の場合にこうして構成された位相的場の理論がReshetikhin-Turaevによって構成された位相的場の理論と一致することをHecke代数の表現のGNS構成法を使って示した。この証明の系として、種数0の点付きリーマン面のタイヒミュラー空間上にできる共形場ブロック束が KZ 接続と適合するユニタリ内積を持つことも併せて示した。
さらに、上野は重複ファイバーの理論を展開し、種数2のすべての退化因子Dとすべての素数pに対して、標数pの体上でpDを重複ファイバーとして持つ曲線の退化族を構成し、正標数の場合は標数0の場合と異なる重複ファイバーが実際に存在することを示した。

研究成果の概要（英文）：From conformal field theory with gauge symmetry constructed by Tsuchiya, Yamada and Ueno I and Joergen E. Andersen constructed modular functors so that we had topological filed theory for three manifolds. When the Lie algebra for gauge symmetry is sl(n,C) we proved that our topological field is isomorphic to the one constructed by Reshetikhin and Turaev by using GNS construction of representations of Hecke algebra. As a corollary to our proof we could also prove that conformal block bundles on the Teichmueller space of pointed Riemann surfaces of genus 0 carry unitary structure compatible with KZ connections.
Ueno also constructed a family of curves over a field of characteristic p, which contain multiple fiber pD where D is any divisor appearing a degeneration of a family of curves of genus 2 and p is any prime number.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007年度	3,900,000	1,170,000	5,070,000
2008年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2009年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2010年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
総　計	14,000,000	4,200,000	18,200,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：代数科学

１．研究開始当初の背景
モジュライ空間は数学の種々の側面で登場し、様々な分野に応用されている。上野はこれまでモジュライ空間と無限可積分系との関係、特に共形場理論との関連に重点を置いて研究を行い、さらに共形場理論の応用としてモジュラー函手の構成と実３次元多様体の不変量の研究を行ってきた。これらの研究では点付き安定曲線のモジュライ空間の研究が重要な働きをする。こうした研究はこれまで種々の観点から行われているが、一般論的な性格が強い研究が多く、たとえば共形場ブロックの具体形を使って、実際に構成される３次元不変量を計算することはほとんどなされていなかった。

２．研究の目的
本研究はモジュライ空間の幾何学を種々の観点から考察しその性質を究明し、無限可積分系に応用することを目的として行う。
上野はこれまでモジュライ空間と無限可積分系との関係、特に共形場理論との関連に重点を置いて研究を行い、さらに共形場理論の応用としてモジュラー函手の構成と実３次元多様体の不変量の研究を行ってきた。本研究では共形場理論から構成した実３次元不変量の持つ性質を明らかにすることが主要な目的である。特に sl(n,C)をゲージ対称性にもつ共形場理論から構成される３次元位相的場の理論が Reshetikhin-Turaev が構成した位相的場の理論と同型であることを証明することを主要な目的とする。さらにそれに付属して点付き安定曲線のモジュライ空間と関連する幾何学の研究、特に正標数の場合の重複ファイバーの研究を行う。

３．研究の方法
モジュライ空間は代数幾何学的に取り扱うことが有効な場合と、複素解析的にタイヒミュラー空間を使う方が有効な場合がある。本研究ではこの両者のアプローチを適宜使うことによって、モジュライ空間の理論を有効に活用する。
本研究プロジェクトでは、特に、非アーベル的共形場理論から構成される点付き安定曲線のモジュライ空間上の共形場ブロック束の性質､特にそのユニタリ性を考察する。上野は J.E.Andersen との共同研究で非アーベル的共形場理論からモジュラー函手を構成し、３次元位相的量子場の理論(TQFT)を構築した。３次元位相的場の理論はリー代数が sl(n,C)に対応する場合は Reshetikhin-Turaev によって量子群を使って構成されている。この Reshetikhin-Turaev による理論はBlanchetによってHecke代数を使って再構成された。一方、上野-Andersen 理論のもととなる非アーベル的共形場理論では、ゲージ群が sl(n,C)の場合 Hecke 代数の表現が登場する。その表現は Blanchet が理論構成に使った表現と同一であることが予想されている。ただ Hecke 代数が１のべき根上で定義されているために、Hecke 代数の表現は準単純でなくなり､そのため Blanchet の表現と非アーベル的共形場理論での表現との正確な対応を見出すことが理論的に難しいくなる。しかし、それらの表現を詳しく解析することによって Reshetikhin-Turaev 理論との同型を証明する。Blanchet の理論では位相幾何学的考察によって、種数０の点付きリーマン面の共形場ブロックに対応する線形空間のユニタリ性が示されており、共形場ブロックと Blanchet 理論によるモジュラー函手の対応を精密に解析することによって共形場ブロック束のユニタリ性を証明することも併せて行う

４．研究成果
リー代数 sl(n C)をゲージ対称性に持つ共形場理論から構成した位相的場の理論は、量子群を使って Reshetikhin-Turaev によって構成された３次元位相的場の理論と一致することを本研究の初期の段階で見出した。Reshetikhin-Turaev による位相的場の理論は量子群の表現を使って構成されていたが、BlanchetはHecke代数の表現とスケイン理論を使って理論を再構成した。
　上野-Andersen 理論と Reshetikhin-Turaev 理論との同型を証明するためには、Blanchet による位相的場の理論と共形場理論から構成される位相的場の理論の間の同型を種数０と種数１の点付きリーマン面の場合に示す必要があった。そのために上野と Andersen はまず、種数１の場合の理論を決定するＳ行列が種数０のデータがあればから構成でき、従ってモジュラー函手自身が種数０のデータから一意的に決まることを示した(Ueno.K & Andersen, J.E.: Modular functors are determined by their genus zero data,雑誌”Quantum Topology”に受理済みで近刊予定）。この事実に基づき種数０の場合に両理

論の同型を証明すれば十分であることが分かり、両者の理論が持つ因子分解定理を使って、各因子を構成する特別な共形場ブロックの場合に同型を具体的に与えることによって両者の同型を証明した。

ただ、この証明では大変複雑な議論を必要とした。そのために、証明の簡易化を試み、最終的にGNS構成法を使ったHecke代数の表現を用いることによって、従来構成していた同型を明確にとらえることが可能となり、従来の複雑な議論を回避することに成功した。その際Blanchetの構成法もGNS構成の方の観点から見直すことが可能になり、上野-AndersenとReshetikhin-Turaevの位相的場の理論の関係が明確に捉えることができるようになった。さらに、この新しい証明によって種数0の場合、位相的場の理論からできるモジュラー函手と共形場ブロックとの対応が明確になり、Blanchetの構成法が保証するユニタリ構造を、この同型対応を使って種数0の点付きリーマン面のタイヒミュラー空間上の共形場ブロック束に引き戻すことによってKZ接続と適合するユニタリ内積が共形場ブロック束に入ることが併せて証明できた。種数0の場合の共形場ブロック束のユニタリ性はsl(2,C)の場合にのみRamadasによってまったく異なる方法で証明されていた。以上の結果はプレプリント

Ueno.K & Andersen, J.E.: Construction of the Reshetikhin-Turaev TQFT from conformal field theory.

に発表され、現在雑誌に投稿中である。

全く異なる二つの方法によって同じ位相的場の理論が構成できることはユニタリ性以外にも多くの応用が予想される。ユニタリ性についても、上で示した同型写像をさらに詳しく解析することによって、さらに精密な結果が得られることが予想され、現在研究中である。

以上の成果はゲージ群がsl(n,C)の場合であり、その他の複素単純リー代数の場合には上野-Andersenの位相的場の理論の構造に関しては今後の研究が必要である。

また、上野はモジュライ空間の理論で、モジュライ空間の境界に対応する準安定曲線とその退化について考察を行った。特に、従来ほとんど考察されることの無かった、種数2の退化曲線の重複ファイバーについて考察した。曲線族の底空間が1次元の場合、退化曲線は因子と見ることができる。この因子がある因子Dを使ってmD, mは2以上の正整数、と書くことができる場合、重複度mの重複ファイバーという。種数2の退化曲線として現れる因子Dが重複ファイバーmDになる場合は体の標数が0であれば簡単にDの構造を決めることができる。しかし、正標数の場合は事情が全く異なり、Dを決定する方法は知られていない。むしろ、あらゆる退化因子Dが現れると考えられている。ただし、この場合重複度は標数pのべきでなければならないことが知られている。実際、種数1の退化の場合は重複ファイバーの理論は三井健太郎によってほぼ満足すべき一般論が構成されている。しかし、その理論は種数が2以上の場合には適用できない。上野は以前、種数2の非重複退化曲線の研究を行っていたが、その結果をもとに正標数の場合の種数2の退化曲線の因子からできる重複ファイバーを考察した。この場合重複ファイバー自身は種数2の曲線族の退化ではなく種数が大きな曲線族の退化となるために理論は複雑になる。上野は因子Dが種数2の任意の退化因子の場合pDの形の重複ファイバーが常に存在することを具体的に退化族を構成することによって示した。ただ、この方法では重複度がpの一般べきの場合には適用することが困難であるために、現在、一般種数の場合の退化を含めた一般論を開発中である。

一方、加藤文元のグループは剛幾何学の一般論に重要な進展をもたらした。剛幾何学は従来の代数幾何学や複素解析幾何学に類似の性質を持つ一方できわめて特異な性質を持つことも知られており、従来は様々な制限をつけた形で理論が展開されていた。加藤文元のグループはそうした制限を取り払った一般論を構築しており、今後の理論展開の基礎を与えるものである。この一般論を構築するためには従来の理論の精密化が種々の側面で必要となり、きわめて困難な作業であることを協調しておきたい。なお、これらの結果の一部はプレプリント

Fujiwara, K.& Kato, F.: Foundations of Rigid Geometry

にまとめられており、近々出版される予定である・

加藤毅のグループは無限可積分系の理論を生物学に必要な新しい数学の構築に適用することを試み、特に力学系の理論を考察し、新しい知見を得た。

徳永のグループは代数曲面の分岐被覆の理論を展開した。特に、二次被覆の場合には整数論の2次体の理論の平方剰余の相互法則との類似を見出した。従来、理論が完成されていると考えられ余り注目されていなかった分野に新しい研究方向を与えた点は特筆すべき成果である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① Andersen, J.E. & Ueno, K. ：Geometric construction of modular functors from conformal field theory, Journal of Knot theory and its Ramifications, 査読有, vol.16, 127-202, 2007.

② Andersen, J.E. & Ueno, K. ：Abelian Conformal Field Theory and Determinant Bundles, International J. Math. 査読有, vol. 18, 919-998, 2007.

③ Ueno, K. ：Conformal field theory and modular functor, in Advances in Algebraic and Combinatrics, editd by K.P. Shum et al., 査読有, 335-352, World Scientific, 2008.

④ Kato, F. ：On the Shimura variety having Mumford's fake projective plane as a connected component, Math. Zeitschrift査読有, vol.259. 613-641, 2008.

⑤ Kato, T. ：Deformations of real rational dynamics in tropical geometry, Geometric and Functional Analysis, 査読有, vol.19, 842-882, 2009.

⑥ Cornelissen, G. Kato, F. & Kontogeorgis, A.： The relation between rigid-analytic and algebraic deformation parameters for Artin-Schreier-Mumford curves. Israel J. Math., 査読有, vol.180. 345-370, 2010.

⑦ Kato, T. ：Pattern formation from projectively dynamical systems and iterations by families of maps, Advanced Studies in Pure Math., 査読有, vol.57, 243-262, 2010.

⑧ Tokunaga, H. ：Geometry of irreducible plane quartics and their quadratic residue conics, J. Singularity, 査読有, vol.2, 170-190, 2010.

〔学会発表〕（計４件）

① Kato, F., Artin-Schreier Mumford curves, Moduli and Discrete Groups 2009 年6月12日, 京都大学数理解析研究所

② Shimizu, Y., Loop spaces and conformal field theory, 研究集会「Hodge 理論と代数幾何学」2009年6月29日, 京都大学数理解析研究所

③ 清水勇二, DG圏の代数化, Workshop on Derived Algebraic Geometry I, 2009年11月24日

④ Ueno, K., Hecke algebra at root of unity and quantum invariants of three-manifolds, 研究集会「代数幾何学とその周辺」2010年12月18日, 高知大学

〔図書〕（計１件）
K. Ueno ：“Conformal field theory with gauge symmetry”, 2008, Fields Institute Monographs, 24. American Mathematical Society, Providence, RI; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2008. viii+168 pp. ISBN: 978-0-8218-4088-7

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
上野　健爾（UENO KENJI）
首都大学東京・大学院理工学研究科・客員教授
研究者番号：40011655

(2)研究分担者

徳永　浩雄 (TOKUNAGA HIROO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：30211395

(3)研究分担者
加藤　毅 (KATO TSUYOSHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20273427

(4)研究分担者
加藤　文元 (KATO FUMIHARU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50294880

(5)研究分担者
清水　勇二 (SHIMIZU YUJI)
国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号：80187468