

平成23年 2月 13日現在

研究種目：基盤研究（B）  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19340011  
 研究課題名（和文） 代数体上の有限クレモナ変換群に対するネーター問題と数論への応用  
 研究課題名（英文） Noether's Problem for Cremona Groups over algebraic number fields and its application to Number theory  
 研究代表者  
 橋本 喜一郎 (HASHIMOTO Kiichiro)  
 早稲田大学・理工学術院・教授  
 研究者番号：90143370

## 研究成果の概要（和文）：

本研究においては、与えられた有限群  $G$  の、代数的数を係数とする多変数有理関数体のクレモナ変換作用に関するネーター問題を研究し、所期の研究成果を得た。その成果を現在総合的に取りまとめる作業を行っているが、完成までにまだ多少の時間が必要である。また、本課題研究の一環として、研究集会「ガロア理論とその周辺」を山形大(2007)、徳島大(2008)、金沢(2007)において開催するとともに、各年度末に早稲田大学理工学部において整数論研究集会を開催し、海外の研究者を交えた講演と討論を通じて本課題研究の進展と今後の研究の進め方などについて討議した。これらの研究集会のいくつかについては報告集の冊子が印刷・配布されている。

研究成果の概要（英文）： We studied the Noether's Problem, which asks the rationality of the fixed field of the rational function field of several variables over a given field, with respect to a given finite subgroup  $G$  of the Cremona group. We solved this problem affirmatively in the case where  $G$  is one of the transitive permutation groups of degree six, and obtained the explicit description of the fixed field as expected. The results are now being collected and prepared in some papers, although it will take some time before the completion. During the period of the research, we had in each year a workshop entitled as "Galois theory and related topics", and discussed the various related problems.. They were held in the university of Yamagata (2007), Tokushima (2008), and Kanazawa(2009). We also had a conference on number theory each year at Waseda university and communicated with many experts of this subject, including those from foreign countries.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2008年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2009年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
年度			
年度			
総計	10,500,000	3,150,000	13,650,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：ガロア理論，ガロアの逆問題，ネーター問題，クレモナ変換群  
有理関数体，生成多項式，代数曲線，ヤコビ多様体

## 1. 研究開始当初の背景

本研究課題の基本をなす「ガロアの逆問題」は、与えられた有限群  $G$  と体  $k$  に対して、ガロア拡大  $K/k$  でそのガロア群  $G(K/k)$  が  $G$  と同型であるものが存在するか、およびその構成法を問う問題である。特に  $k=Q$  (有理数体) の場合が重要で基本的である。この問題も長い歴史をもち、さまざまな研究がなされているが、一般の有限群  $G$  に対する解答 ( $K/Q$  の存在と構成) は未解決の難問であるが、有限体上の線型代数群を含む多くの  $G$  に対して近年目覚ましい進展が得られつつある。

一方、 $G$  と体  $k$  に対して存在が知られている場合にそのようなガロア拡大  $K/k$  の全体を何らかの意味で把握する問題に関しては、簡単な構造を持つ群の場合でも満足な結果は殆ど知られていない。実際、与えられた代数体上のアーベル拡大を記述・構成することは、「類体の構成問題」(ヒルベルトの第 12 問題) と呼ばれ、現在でも数論の最も重要な難問の一つと見なされている。本研究は、構成的研究を通じてこれらの問題に新しい展開をもたらすことを目的としている。その鍵となる手段は関数体への有限群の作用に関する「ネーターの問題」である。これは 20 世紀初頭に提起された古典的問題で、不変式論、代数幾何学、表現論などの多くの分野に関連する重要なテーマである。ネーターの問題は、特に日本で 1950-70 年代に増田勝彦、宮田武彦、遠藤静男氏等によって先駆的研究がなされ、後述の海外研究に影響を与えた。また、80 年代の後半に前田高士氏による、5 次交代群  $A_5$  のネーターの問題の肯定的解決が与えられたが、その後の発展には継がっていない。他方、海外では 70 年代以降、Lenstra, Swan, Saltman など米国での研究および Manin, Voskressenski, Iskovski などロシアのグループの研究が活発に行われている。近年では、J.P.Serre, A.Merkurjev, S.Garibaldi によるガロアコホモロジーによる研究が著しい。さらに一般に有理関数体の部分体の構造に関する Zariski の問題、単有理的(unirational)の構成問題、などネーターの問題に関連する諸問題にも多くの研究がなされている。しかし、多くの非可換群に対してネーターの問題は未解決であるばかりでなく、これを有限群の線形作用に一般化した問題は、少数の個別研究はあるものの、ほとんど未開拓の領域と言っても過言ではない。

このような事情の中で申請者は 2000 年ころから本学学生、および中村博昭、角皆宏、徳永浩雄氏等のグループで「ガロアの逆問題」に対する学習・研究のためのガロアセミナーを組織し、随時共同研究の形で研究を進め、巡回群・二面体群等の場合を中心として幾つかの成果を得た。この活動を通じてガロア逆問題に関する組織的研究の端緒を開くと共に、多くの興味深い例を発見した。同時にガロアの逆問題に対する海外の第一線研究者である Brumer, Matzat, Ledet, Kang, および巡回多項式族の構成問題の推進者として著名な Washington, Thaine などの数学者を招いて数回にわたって研究集会を開き問題討議と交流をしてきた。2001 年には主都大学東京で国際研究集会「Galis Groups and Modular Forms」を開き Kluwer から報告論文集を刊行した。その結果、本研究組織は「ガロアの逆問題」の構成的研究の世界的な拠点となりつつある。

## 2. 研究の目的

当研究の目的は、これまでの研究を更に組織的に推進することであるが、その特色は初めから代数的整数論および数論幾何との関連・応用を念頭に置き、有効な  $G$ -多項式の族を数論的情報が具体的に取出せる形で記述することを主眼としている点である。さらに、今回の研究ではこれまでの研究で明らかになった、他の数学理論・研究との関連、概念や知識の整理を一層徹底して追求することにより、理論的にも集大成が可能な形で総合的に研究を進める。

## 2. 研究の目的

具体的には、以下のような課題を研究する：

具体的には、以下のような課題を研究する：

(1) 巡回群・二面体群等の基本的な有限群の、クレモナ変換群としての実現を組織的に構成し、その「ネーターの問題」を研究する。特に非線形な作用の場合に固定体の有理性から生成的多項式族が得られる為の条件を求め、そのような例を包括的に構成すること。

(2) 有限群クレモナ変換群  $G_k(x_1, \dots, x_m)$  を含む関数体の線型作用に拡張される条件、および例を組織的に考察する。特に  $G$  が巡回群の場合が基本的である。

(3) 「ネーターの問題」が否定的解をもつ場合の固定体の極小生成系と関係式の具体的な研究を行う。特に  $8n$  次巡回群の場合は線形作用の場合に固定体の非有理性が知られており、非線形作用の研究が興味深い。

(4) 定められた数論的特徴を持つ  $k$  上の  $G$ -ガロア拡大の族を最小個数のパラメータを用いて求める。生成的多項式の場合、その個数 ( $G$  の  $k$  上の essential dimension) の決定問題を組織的に研究する。

(5)  $n$  次対称群  $S_n$ , 交代群  $A_n$  の既約線型表現に対して「ネーターの問題」を具体的に研究する。

(6) 種数  $g$  の超楕円の代数曲線、そのヤコビ多様体の  $2g$  等分点の体から生ずる体のガロア群の退化とヤコビ多様体の自己準同型環の関連を調べる。Brumer の 6 次多項式族はガロア群が  $S_6$  から  $A_5$  に退化する興味深い例である。

(7) 以上の研究課題やそれに関連する諸問題についての、内外の研究者によるワークショップや研究集会を行う。これらを通じて情報交換し、共通の問題について協力体制を確立しその解決を図る。

### 3. 研究の方法

(1) 有限群の、クレモナ変換群として組織的に構成し、その「ネーターの問題」を研究する。線形な作用の場合に固定体の有理性から生成的多項式族が得られることが知られている。そこで非線形な作用の場合に同様に固定体の有理性を判定すると共に、有理性から生成的多項式族が得られる為の条件を求め、そのような例を構成する。本研究では、固定体の極小な生成系をうまく与えてその関係式を導き、これをガロアの逆問題に応用する。

(2) 巡回群の場合、一般に位数が  $8n$  の巡回群の変数への置換作用に対する(置換作用の)「ネーターの問題」は  $Q$  上では否定的解をもつことが知られている。よって  $8n$  次巡回群の非線形クレモナ変換群としての実現を構成し上記の問題を調べることが重要で興味ある課題である。  $n=8$  の場合このような実現の例として  $Q(x, y)$  のクレモナ変換  $s(x)=y, s(y)=(1+x)/(1-x)$  がある。しかし、 $8n$  次巡回群のネーターの問題に対する、この否定的結果は定性的でそれ以上の情報はなく、結果の意味するところも理解されていない。特に、得られる  $8n$  次巡回

拡大の族が versal であることを示すことを目標にする。また、同時に  $C_{\{8n\}}$  を非線形クレモナ変換群として与えて、同様な問題を考察する。さらに、後者が拡大体の線型作用から引き起こされる場合を調べ、そのような条件を統一的に求める。

(3) 置換作用による「ネーターの問題」は多くの有限群で研究があるが、その他の場合は簡単な有限群の場合でも殆ど研究がなされていない。そこで、 $n$  次対称群  $S_n$ , 交代群  $A_n$  の各  $Q$ -既約線型表現に対して「ネーターの問題」を具体的に研究する。No-name Lemma の簡単な応用によって、この場合の固定体は安定有理的(stably rational)であることが判る。従ってこの場合の固定体の有理性の証明を与えることは重要な問題である。差し当たり、 $n$  の分割  $(n-2, 2), \tilde{(n-2, 1, 1)}$  と対応する、次数が  $n(n-3)/2, (n-1)(n-2)/2$  の既約線型表現の場合が着手可能な問題であると思われる。

(4) 種数  $g$  の超楕円の代数曲線、そのヤコビ多様体  $J$  が自明な自己準同型環をもつ場合は、森重文氏、G. Zarhin による研究がある。これらを踏まえて種数 2 の場合に  $J$  の 2 等分点の体から生ずる体のガロア群の退化とその自己準同型環の関連を調べる。有名な Brumer の 6 次多項式族はガロア群が  $S_6$  から  $A_5$  に退化する興味深い例である。申請者は、これまでの基盤研究(C)で得た  $A_5$  をガロア群にもつ 6 次多項式族  $H(X; a, b, c)$  が  $Q$  上生成的であることの、このアイデアにそった明快な証明を与えることが出来た。このことは、標数 0 の任意の体  $k$  上で全ての  $A_5$  拡大が実二次体  $Q(\sqrt{5})$  の整数環を実乗法にもつ種数 2 の  $k$  上の曲線のヤコビ多様体  $J$  の 2 等分点の体として得られることを意味する。このような  $J$  は  $GL(2)$ -type であり、Ribet により対応するガロア表現はモジュラー的であることが予想されている、という点で極めて興味深い。

(5) 研究の推進のため、これまでのように本研究の分担者及び連携研究者を中心とする国内のガロア理論研究者により毎月 1 回程度の「ガロアセミナー」を組織し、分担者の間で研究討議を行う。また、得られた成果をまとめると共に、海外を含む研究集会等で発表することも計画する。また、例年のとおり秋にガロア理論の研究集会を国内で開催する。

#### 4. 研究成果

上記の「研究の目的」「研究の方法」において掲げた諸問題について組織的な研究を遂行し、そのうちいくつかの課題に対しては満足すべき解決が得られた。

特に課題(4)すなわち 6 次の置換群の場合に対する成果を詳しく述べる。6 次の可移置換群は共役を除いて全部で 16 個存在する。それらは記号 (6T1)–(6T16) で表わされる。このような群  $G$  の各々に対して、6 個の独立変数の置換作用に関する古典的なネーター問題および、それらの複比が生成する 3 変数有理関数体  $Q(x, y, z)$  への  $G$  のクレモナ変換作用に関するネーター問題をしらべた。昨年度までの研究で  $G=(6T15)$ , (6T16) を除くすべての場合に固定体の極小な生成系を具体的に求め、有理性を決定することに成功した。  $G=(6T15)$ , (6T16) の場合の固定体の有理性の直接的な決定問題は大変難しく、解決にはいたらなかったが、4 個の元からなる生成元とそれらの関係式を構成し、同問題の解決に向けて大きな進展があった。また  $G=(6T16)$  については、 $G$  は 6 次対称群と同型で、これを 2 元体上の 4 次元斜交群と同一視することができる。これによって、6 次置換群のネーター問題と種数 2 の代数曲線のヤコビ多様体の 2 等分におけるガロア表現との関連について研究を進め、2 次のジークルモジュラー群のレベル 2 の合同部分群に対するジークル保型形式の次数付き環の商体が、本研究と本質的には同値であることが明らかになった。このアイデアに従って、1960 年代の井草の研究結果を本研究に応用することによって、 $G=(6T16)$  の場合の 3 次元クレモナ変換群におけるネーター問題を肯定的に解決することができた。

種数 2 の代数曲線のヤコビ多様体の 3 等分におけるガロア表現についても同様な研究を昨年に引き続いて行った。3 等分の一部が定義体上に有理的である場合にガロア表現の退化が生じるが、その詳細についても詳しく研究を行った。

また研究期間のあいだ、毎年 3 月に早稲田大学理工学部において整数論研究集会を開催し、「ガロア理論」とその代数的整数論への応用が主要なテーマとして取り上げられた。さらに「ガロア理論」の研究集会を以下の大学を会場として開催した。

・研究集会「ガロア理論とその周辺」

・2009 年 12 月 25–27 日金沢大学サテライトプラザ（「第 8 回北陸数論研究集会」と

共催）

・2008 年 9 月 9–12 日 徳島大学

・2007 年 11 月 3–4 日 山形大学

これらの集会で国内のみでなく、海外から多数の研究者を招き、本研究課題における問題とその取り組みについて討議してきた。以上の実績により、本研究組織はガロア理論の構成的研究に関するひとつの拠点となり、国際的に大きな人的交流が不断に行われる状態になっている。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 15 件）

1 Kiichiro Hashimoto, Ling Long, Yifang Yang, Jacobstahl Sum for  $Q(\sqrt{-2})$ , Forum Math. to appear (2011).

2 Jun Murakami and Kiyokazu Nagatomo Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups Internat. J. Math. to appear (2011).

3 Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, Weber's Class Number Problem in the Cyclotomic  $Z_2$ -Extension of  $Q$ , Experimental Math. 18-2, 213-222 (2010).

4 Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, Weber's Class Number Problem in the Cyclotomic  $Z_2$ -Extension of  $Q$ , II, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 22, 359-368 (2010).

5 Kiichiro Hashimoto, Yukiko Sakai, Poncelet's theorem and versal family of curves of genus two with  $\sqrt{2}$  multiplication, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B12 (2009), 249–261.

6 Kiichiro Hashimoto, Yukiko Sakai, General form of Humbert's modular equation for curves with real multiplication of  $D=5$ , Proceedings of the Japan Academy, Series A, 85 (2009), no. 10, 171-176.

7 J. Cho and Jun Murakami, Some limits of the colored Alexander invariant of the figure-eight knot and the volume of hyperbolic orbifolds. J. Knot

Theory Ramifications 18, no. 9, 1271–1286 (2009).

8 J. Cho, Jun Murakami and Y. Yokota, The complex volumes of twist knots. Proc. Amer. Math. Soc. 137, no. 10, 3533–3541 (2009).

9 Kiichiro Hashimoto, Akinari Hoshi, Yuichi Rikuna, Noether's problem and  $\mathbb{Q}$ -generic polynomials for the normalizer of the 8-cycle in  $S_8$  and its subgroups, Math. Comp. 77, 1153–1183 (2008).

10 Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, On the Iwasawa lambda-invariant of the cyclotomic  $\mathbb{Z}_2$ -extension of  $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})$  Math. Comp. 77, (2008).

11 Jun Murakami and K. Nagatomo, Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups. Internat. J. Math. 19 (2008), no. 10, 1203–1213.

12 Jun Murakami, Colored Alexander invariants and cone-manifolds. Osaka J. Math. 45 (2008), no. 2, 541–564.

13 Jun Murakami, Colored Alexander invariants and cone-manifolds Osaka J. Math. Vol. 45, 541–564 (2008).

14 Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, Shuji Yamagata, Iwasawa lambda-invariants and Mordell-Weil rank of Jacobian varieties with complex multiplication Acta Arithmetica 127, 305–307 (2007).

15 Katsuya Miyake, Teiji Takagi, Founder of the Japanese School of Modern Mathematics Japan. Jour. Of Math., 3rd Series Vol.2, 151–164 (2007)

[学会発表] (計 26 件)

1 Kiichiro Hashimoto, Some results on Jacobsthal sum identities, 研究集会「代数的整数論とその周辺」2010年12月6–10日, RIMS (京都大学)

2 Kiichiro Hashimoto, An incomplete survey on Noether's problem for  $S_n$  and  $A_n$ , 研究集会「ガロア理論とその周辺」2009年12月25–27日, 金沢大学サテライトプラザ

3 Kiichiro Hashimoto, Some aspects of Galois theory on genus two curves 中華民國數學年會 2008年12月20日 台湾国立清華大学

4 Kiichiro Hashimoto, Linear Relations of Quaternion theta series and Vanishing of  $L(s, f)$  at  $s=1$ , 2008年12月17日 台湾国立清華大学

5 Kiichiro Hashimoto, Yukiko Sakai, Poncelet の閉形定理と  $\Delta=8$  の実乘法を持つ種数 2 の超楕円曲線について 日本数学会秋季総合分科会 2007年9月23日 東北大学

6 Kiichiro Hashimoto, Yukiko Sakai, On versal family of genus 2 curves with  $\sqrt{2}$ -multiplication RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」2007年12月14日 京都大学

7 Kiichiro Hashimoto, Hiroshi Tsunogai, Noether's Problem for transitive Permutation Groups of degree 6, I, II 研究集会「ガロア理論とその周辺」2007年11月4日 山形大学

8 Masanari Kida, Yuichi Rikuna, A classification of isomorphic classes of Brumer's quintic polynomials using elliptic curves 研究集会「ガロア理論とその周辺」2007年11月3日 山形大学

9 Masanari Kida,  $D_5$  拡大のクンマー理論 早稲田大学整数論研究集会 2008年3月11日 早稲田大学

10 Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, ウェーバーの類数問題に対する計算的アプローチ 研究集会「代数学と計算」2007年12月7日 首都大学東京

11 Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, 導手 2 巾の実アーベル体の類数問題 (Weber の問題) 早稲田大学整数論研究集会 2008年3月12日 早稲田大学

12 Jun Murakami, Colored Alexander invariant and cone manifolds, Workshop Hyperbolic Volume 2007, 2007/7/3 Universite de Fribourg, Swiss

13 Jun Murakami, On representations of mapping class groups related to  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , Workshop on linear representations of the mapping class group and related topics,

2007/12/22, 高知県高知市 桂浜荘

14 Jun Murakami, On the TQFT Coming from the Restricted Quantum Group Finite Type Invariants, Fat Graphs and Torelli-Johnson-Morita Theory 2008/4/3 CTQM, University of Aarhus, Denmark

15 Jun Murakami, On the invariants of knots and 3-manifolds related to the restricted quantum group トポロジー火曜セミナー  
2008/4/15 東京大学

16 Jun Murakami, Beyond the quantum invariants of knots and 3-manifolds  
Topology Seminar 2008/7/23 東京工業大学

17 Jun Murakami, Colored Alexander 不変量と体積予想, 夏の学校「低次元トポロジーにおける未解決問題」, 2008/8/14, 15, 16, 名古屋大学多元数理科学研究科

18 Jun Murakami, On branch problem of complex volume, Topology and Computer 2008, 2008/8/23, 東京工業大学

19 Jun Murakami, On logarithmic knot invariant, Braids in Paris, 2008/9/18, Univ. Paris Diderot (Paris 7), France

20 Jun Murakami, On the variations of quantum  $sl_2$  invariants of knots and links, Workshop on Turaev-Viro invariant and related topics, 2009/2/10, 東京工業大学

21 Jun Murakami, On logarithmic knot invariant and volume conjecture, Séminaire de Théorie des Noeuds, 2009/3/25, Université de Genève, Swiss

22 Jun Murakami, On the extra quantum group  $U_{\check{\chi}^1(r)}(sl_2)$  at root of 1, 2009 年度日本数学会年会, 2009/3/28, 東京大学

23 Jun Murakami, Generalized quantum 6j-symbols and the colored Alexander invariant, Topology seminar, 2009/9/15, Université de Strasbourg, France

24 Jun Murakami, On the quantum 6j symbols for the non-integral highest weight representations of  $U_q(sl_2)$  at root of 1, 2009 年度日本数学会秋期総合分科会, 2009/9/24, 大阪大学

25 Jun Murakami, On the tensor category of projective modules of the small quantum groups, Category Theory, Computer Science, and Topology, 2009/10/18, 信州大学

26 Jun Murakami, Colored Alexander invariant and cone manifolds Workshop HYPERBOLIC VOLUME 2007, 2007 年 7 月 3 日 Univ. Friburg

[その他] ホームページ等  
<http://www.waseda.jp/sem-wnt/symposium/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

橋本喜一郎(HASIMOTO KIICHIRO)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 90143370

### (2) 研究分担者

小松 啓一(KOMATSU KEIICHI)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 80092550  
村上順 (MURAKAMI JUN)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 90157751  
三宅 克哉(MIYAKE KATSUYA)  
研究者番号: 20023632

### (3) 連携研究者

木田雅成(KIDA MASANARI)  
電気通信大学・教授  
研究者番号: 20272057  
角皆宏 (TSUNOGAI HIROSHI)  
上智大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 20267412