

機関番号：10101  
 研究種目：基盤研究(B)  
 研究期間：2007～2010  
 課題番号：19340012  
 研究課題名(和文) 微分式系と階別単純リー環に付随する幾何構造の研究

研究課題名(英文) Research on the differential systems and geometric structures associated with simple graded Lie algebras

研究代表者  
 山口 佳三 (YAMAGUCHI KEIZO)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：00113639

研究成果の概要(和文)：背足の原理から導かれる、有限型微分方程式系の中で、無限小接触自己同型群が例外的に豊富となるクラスを決定し、このクラスの有限型微分方程式系のモデル方程式を具体的に記述した。また、二階接触幾何学において基本的な二つの Reduction 課程を整備し、これを二つの定理として定式化した。

研究成果の概要(英文)：We determined the class of differential equations of finite type, which admits extraordinarily rich infinitesimal symmetries, among the classes of differential equations of finite type obtained from the Se-ashi's principle. Moreover we write up explicitly the model equations of this class of finite type equations. Furthermore we investigated the fundamental Reduction procedure in the fields of Contact Geometry of second Order and formulated two fundamental Reduction Theorems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2008年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2009年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2010年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
年度			
総計	13,700,000	4,110,000	17,810,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分式系、階別単純リー環、接触幾何学、包含系

### 1. 研究開始当初の背景

代表者は、これまでの基盤研究等を通じて、接触幾何学を背景に微分方程式系の接触幾何学的研究を提唱し、その課程で微分方程式系をジェット空間の部分多様体として捉え、これを研究対象として幾何学的手法で研究してきた。この際、微分方程式系の接触変換による同値問題を PD-多様体の幾何学として定式化してきている。本研究課題は、これを基に、微分式系に関する「田中理論」を応用してこの分野の研究を深化させることを意図して開始した。

### 2. 研究の目的

この研究の目的は大きく分けて2つからなる。1つは、微分式系の概念を通じて微分方程式系を幾何学的(接触幾何学的)に研究することであり、もう1つは、階別単純リー環に付随する幾何構造の研究と、その前者との融合の様子を調べることにある。詳しくは、最初の課題は、微分式系をジェット空間の部分多様体として幾何学的対象ととらえて、接触同値問題を核に微分幾何学および特異点論的手法で研究することにある。第2の課題

は、階別単純リー環に付随する幾何構造に対して、田中昇氏によって構成された正規カルタン接続の理論のより詳細な構造説明とその応用および発展を語ることである。

より具体的には、つぎの3つを主要課題として研究した：

(1) 二階一未知関数偏微分方程式系の接触同値問題

(2) Monge-Ampere 方程式の解の特異点と衝撃の構成

(3) 微分方程式系のシンボルより生じる階別リー環の研究および高階有限型微分方程式系の同値問題

### 3. 研究の方法

上述した3つの主要課題に対して、その研究の方法を述べる。(1)の課題は、E.Cartanの研究を発展させるものであって、二階の偏微分方程式系を幾何学的には2-ジェット空間の部分多様体として、微分式系のことばで特徴付けを行って研究する。その基本部分は、すでにこれまでの基盤研究等による研究で「PD 多様体の理論」として定式化されている。今回の研究ではそのReductionの課程を微分式系の幾何学で解明するのがテーマである。(2)の課題は、Monge-Ampere 方程式の解の特異点の発生を、二階のPD 多様体の定式化からはみだす部分(二階接触幾何学的特異点)として説明しようとするものである。すなわち、Monge-Ampere 方程式の定める2-ジェット空間の超曲面Rの1-ジェット空間へのprojectionが持つ特異点およびRがPD 多様体とならない特異点を通して、解の特異点の発生を説明しようとするものである。(3)の課題は、背足の導入した(深さ1の階別単純リー環とその既約表現を指定することによって定まる)高階有限系微分方程式系のクラスに対する接触同値問題の山ローハツ井による定式化(2002)を用いてリー環論とその表現論を有効に活用する研究課題である。

### 4. 研究成果

19年度は、背足の原理から導かれる、有限型微分方程式系の中で、無限小接触自己同型群が例外的に豊富となるクラスの研究を行った。結果的には、2階および3階の常微分方程式の一般化となるこれらのクラスが、階別単純リー環に付随する幾何構造の1系列として見つかると、このクラスの有限型微分方程式系のモデル方程式を具体的に書き上げることに成功した。さらに、上記結果をも含む形で、微分方程式系の2階の接触幾何学の展開に向けての微分式系の導入部分を解説する講義録をまとめて公表した。この講義録では、接触多様体の基本定理であるダルブーの定理、高次ジェット空間の接触変換論の

基本であるベックルンドの定理等の証明を与え、E.Cartanによって発見された例外単純群G2を接触自己同型として持つ非線形過剰決定系の具体的構成を解説した。

20年度は、2階1未知関数偏微分方程式系の接触同値問題、特に、G2型偏微分方程式系の研究の発展と、2階のPD多様体に対する「簡約化(Reduction)」の過程の整備を行った。特に、コーシー特性系を許容する系に対する、First Reduction 定理を整備し、この「簡約化」によって得られる微分式系を完全に特徴付けた。この特徴付けを用いて、初年度に発見した階別単純リー環に付随する幾何構造の1系列の具体的な微分式系のモデルを利用して、その無限小接触自己同型環が有限次元単純リー環となる、コーシー特性系を許容する2階1未知関数偏微分方程式系を構成した。

21年度には、二階の接触幾何学におけるSecond Reduction 定理を定式化した。この定理は、E.Cartanの2ないし3独立変数のInvolutiveな2階1未知関数偏微分方程式系に対する研究を包括するものであり、多独立変数の2階1未知関数偏微分方程式系の表象(シンボル)がどのような性質を持てば、2段階の「簡約化」が可能となるかを明らかにした。これによって、対象となる偏微分方程式系に、多変数のモンジュ特性系が存在する十分条件を与えている。

22年度には、まず、Second Reduction 定理のさらなる整備を行い、この「2段階の簡約化」によって2階微分方程式系より得られた微分式系がどこまで特徴づけられるかを課題とした。さらに、Second Reduction 定理を用いて、2階の接触幾何学に関わる階別単純リー環に付随する幾何構造の例を増やし、これらについて、田中理論を用いて、その基本不変量と2階の微分方程式との関連を解明した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10件)

- ①. L.Chen and S.Izumiya, Singularities of Anti de Sitter torus Gauss maps, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 41 (2010), 37—61, 査読有
- ②. T. Kato and K. Matsumoto : Some transformation formula for Lauricella's hypergeometric function FD, Funkcial. Ekvac.52(2009), 203-212, 査読有
- ③. H.Furuhata : Hypersurfaces in statistical manifolds, Differential

- Geom. Appl. 27(2009), 420-429, 査読有
- ④. H.Ohta and K.Ono : An inequality for symplectic fillings of the link of a hypersurface K3 singularity, Banach Center Publ. 85, Polish Acad.Sci. Inst. Math., Warsaw (2009), 93—100, 査読有
  - ⑤. K.Yamaguchi, Contact Geometry of Second Order I, Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability: The Abel Symposium 2008, Abel Symposia 5 (2009), 335—386, 査読有
  - ⑥. K.Shibuya and K.Yamaguchi, Drapeau Theorem for Differential Systems, Differential Geometry and its Application 27 (2009), 793—808, 査読有
  - ⑦. S.Izumiya and F. Tari: Projections of surfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes, Revista Matematica Iberoamericana 24, 895-920(2008), 査読有
  - ⑧. A.A.Davydov, G.Ishikawa, S.Izumiya and W.Z. Sun: Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, Japanese Journal of Mathematics 3, 93-119 (2008), 査読有
  - ⑨. K.Yamaguchi and T.Yatsui, Parabolic Geometries associated with Differential Equations of Finite Type, Progress in Mathematics 252 (From Geometry to Quantum Mechanics: In Honor of Hideki Omori) (2007), 161—209, 査読有
  - ⑩. K.Yamaguchi Geometry of Linear Differential Systems Towards Contact Geometry of Second Order, IMA volumes in Mathematics and its Applications 144 (Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations)(2007), 151—203, 査読有

[学会発表] (計 6 件)

- ①. K.Yamaguchi, Reduction Theorems in Contact Geometry of Second Order, Conference on Differential Geometry and Tanaka Theory, 数理解析研究所, 2011年1月25日
- ②. K.Yamaguchi, Geometry of Differential Systems and Parabolic Geometries, Tambara Workshop on Parabolic Geometries and Related

Topics, Tambara 2010年11月5日

- ③. K.Yamaguchi, Geometry of Second Order Differential Equations, Workshop on Differential Systems, Utah State University, Logan 2009年11月2日
- ④. K.Yamaguchi: Drapeau Theorem for Differential Systems and beyond, Parabolic Geometry and Partial Differential Equations, University of Auckland, New Zealand 2008年8月11日
- ⑤. K.Yamaguchi : Contact Geometry of Second Order, The Abel Symposium 2008 Tromso, Norway 2008年6月21日
- ⑥. K.Yamaguchi : Contact Geometry of Second Order, MSRI Workshop: Exterior Differential Systems and the Method of Equivalence, Berkeley 2008年5月5日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山口 佳三 (YAMAGUCHI KEIZO)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：00113639

### (2) 研究分担者

泉屋 周一 (IZUMIYA SHUICHI)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：80127422

小野 薫 (ONO KAORU)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：20204232

石川 剛郎 (ISHIKAWA GOO)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：50176161

松本 圭司 (MATSUMOTO KEIJI)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：30229546

古畑 仁 (HURUHATA HITOSHI)  
 北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
 研究者番号：80282036

八ツ井 智章 (YATSUI TOMOAKI)  
 北海道教育大学・教育学部・准教授  
 研究者番号：00261371

中居 功 (NAKAI ISAO)  
 お茶の水女子大学・理学部・教授  
 研究者番号：90207704

小沢 哲也 (OZAWA TETASUYA)

名城大学・理工学部・教授  
研究者番号：20169288  
佐々木 武(SASAKI TAKESHI)  
神戸大学・理学部・教授  
研究者番号：00022682