

平成 22 年 4 月 20 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19340014

研究課題名 (和文) 複素多様体の退化族における多重標準束と乗数イデアル層の研究

研究課題名 (英文) Research on pluricanonical bundles and multiplier ideal sheaves for a degenerate family of complex manifolds

研究代表者

高山 茂晴 (TAKAYAMA SHIGEHARU)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20284333

研究代表者の専門分野：複素幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：多重標準束、乗数イデアル層、退化族、ホッジ計量

## 1. 研究計画の概要

$f: X \rightarrow T$  を複素多様体間の固有正則写像で、代数的または Kaehler 的と仮定する。原点  $0$  以外では  $f$  は滑らかとし、中心ファイバー  $X_0 = f^{-1}(0)$  は多様体  $X_t = f^{-1}(t)$  の退化とみなす。  $X_0$  以外の各  $X_t$ , または  $f$  が滑らかな所では、多重標準系  $|mK|$  の有界性、順像層  $f_*K$  の半正値性などの良い性質が知られている。本研究の目的は、(1) 解析的：写像  $f$  が滑らかな所の  $X_t$  のいわゆるホッジ計量の  $t=0$  の近くでの退化または発散の様子を記述すること、(2) 幾何的：そのホッジ計量の退化の様子が多様体  $X_t$  の退化とどのように関係しているかを記述すること、そして(3)代数的：それらが組  $(X, X_0)$  の乗数イデアル層とどのように関係しているのかを記述することである。これら各方面からの考察を総合して  $f: X \rightarrow T$  の大域的な構造を決定できるようにする。

## 2. 研究の進捗状況

(1) 滑らかな固有ケーラー射  $f: X \rightarrow Y$  と  $X$  上の中野半正なエルミートベクトル束  $(E, h)$  に対して、高次順像層  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  の正値性について研究した。まず次を得た。

定理 1.  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  は局所自由層である。さらに  $w$  を  $X$  のケーラー形式とすると、 $w$  と  $h$  に関する  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  のホッジ計量  $g$  を定義することができて、その曲率は中野半正である。

関連する結果が代数幾何において知られているが、それは Griffiths 半正という正値性に対応していて、射  $f: X \rightarrow Y$  が滑らかな場合には、定理 1 が本質的な部分で強い結果になっている。定理 1 は初め  $q=0$  の場合に

Berndtsson により得られたが、それとは独立に我々は少し弱い形の結果を得ていた。それを受けて、次に研究すべき課題が幾つか考えられた。定理 1 はその一つである。問題点の一つは正しいホッジ計量  $g$  の定義であった。

(2) さらに滑らかとは限らない固有ケーラー射  $f: X \rightarrow Y$  に対して、 $F = R^q f_* K_{X/Y}(E)$  の正値性について、これまでに得た結果をより一般化するような研究を行った。以下、記述があまり技術的にならないように  $F$  は局所自由であると仮定する。  $X$  のケーラー形式  $w$  を一つ固定する。  $p: P(F) \rightarrow Y$  を  $F$  に付随した射影空間束とし、 $L=O(1)$  を普遍商直線束とする。自然な全射  $p^*F \rightarrow L$  がある。  $f$  はザリスキー開集合  $Y - D$  の上では滑らかとする。(1)の研究から  $Y - D$  上では  $F$  は  $w$  と  $h$  に関するホッジ計量  $g$  により中野半正である。  $Y - D$  においては  $L$  に  $p^*g$  の商エルミート計量  $g_L$  を入れる。これは半正の曲率をもつ。ここでの結果は、この  $g_L$  が曲率が半正を保ったままで  $L$  全体の特異エルミート計量  $g_L$  に拡張できる、というものである。

## 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。

(理由) 当初計画していた高次順像層のホッジ計量の曲率を計算することに成功し、さらに退化ファイバーの周辺での挙動を解析することに成功した。

## 4. 今後の研究の推進方策

ここまでの研究で局所的な理論はかなり完成してきているので、今後は大域的な構造の解明を行う。特に Weil-Petersson 計量の

域解析の研究を行う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 20 件)

Mourougane Ch. - Takayama S., Extension of twisted Hodge metrics for Kaehler morphisms, J. Differential Geom., 83, (2009), 131-161, 有.

Mourougane Ch. - Takayama S., Hodge metrics and the curvature of higher direct images, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 41, (2008), 905-924, 有.

Takayama S., On uniruled degenerations of algebraic varieties with trivial canonical divisor, Math. Z., 259, (2008), 487-501, 有.

Takayama S., On the uniruledness of stable base loci, J. Differential Geom., 78, (2008), 521-541, 有.

〔学会発表〕(計 22 件)

高山 茂晴, 高次順像層のホッジ計量について, 日本数学会 函数論分科会 特別講演, 2009 年 3 月 29 日, 東京大学.

〔その他〕

ホームページ

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/takayama.html>