

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 8 月 30 日現在

機関番号 : 12601
 研究種目 : 基盤研究 (B)
 研究期間 : 2007 ~ 2010
 課題番号 : 19340015
 研究課題名 (和文) ゲージ理論とホモトピー論

研究課題名 (英文) gauge theory and homotopy theory

研究代表者

古田 幹雄 (FURUTA MIKIO)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号 : 50181459

研究成果の概要 (和文) :

4次元の時空の形を研究する手段についての研究を行った。物理学に由来する偏微分方程式を用いる。

(1) 情報を引き出す方法の整備

(Tian-Jun Li 氏との共同研究によって安定ホモトピー版 Seiberg-Witten 不変の Pontrjagin-Thom 構成による定式化の整備を行った。)

(2) 偏微分方程式の拡張し適用範囲を広げる研究。

(Seiberg-Witten モノポール方程式の局所係数版の構成を行った。応用として中村信裕氏によって、4次元微分可能多様体に対して局所係数付きの交叉形式の満たす制約条件が得られた。)

(2) 量子力学の半古典近似のある側面を説明する数学的枠組みの構成。

(吉田尚彦氏、藤田玄氏との共同研究によりシンプレクティック多様体上の Dirac 作用素の指数が Bohr-Sommerfeld 軌道に局所化するメカニズムを解明し、一般化した。)

研究成果の概要 (英文) :

We investigated shape of 4-dimensional spaces using partial differential equations which were related to physics.

(1) Formulation of a Pontrjagin-Thom construction to describe the stable homotopy version of the Seiberg-Witten invariant (joint with Tian-Jun Li).

(2) Construction of a local coefficient version of the Seiberg-Witten monopole equation. As an application Nobuhiro Nakamura obtained a restriction on the intersection form of 4-dimensional smooth manifolds with local coefficients.

(3) Clarification and generalization for the mechanism of the localization of the index of Dirac operators on symplectic manifolds to Bohr-Sommerfeld orbits (joint with Takahiko Yoshida and Hajime Fujita.)

交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009 年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2010 年度	2,600,000	780,000	3,380,000
年度			
総計	8,700,000	2,510,000	11,310,000

研究分野 : 幾何学

科研費の分科・細目：数学、幾何学
キーワード：トポロジー、位相幾何、幾何学

1. 研究開始当初の背景

2004~2006 年度の同じ研究課題名の萌芽研究において、ねじれたユニヴァースの族に関するねじれたスペクトラムの族の理論によって Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の定義を確立にむけた研究が行われ、第一歩として非線形 Fredholm 作用素の族を扱う枠組みを構成された。また、非コンパクトなモジュライ空間を扱う第一歩として、モジュライ空間上のみならず、それと底空間の積の上で切断を摂動する柔軟な手法の枠組みが構成された。

2. 研究の目的

本研究の目標とするのは、ゲージ理論の無限次元幾何学としてホモトピー論的枠組みからの理解である。通常のゲージ理論の低次元幾何学への応用の手順では、与えられた設定に加えて副次的データを任意に与え、それらの下で方程式を設定し、解の個数からなる諸データを取り出し、最後に副次的データに依存しない情報を取り出す。本研究では、副次的データを置かず、その分の自由度を保留された方程式自身を無限次元において幾何学的対象として扱う枠組みを展開する。

これらの枠組みの整備の有用性としては、次の可能性が考えられる。第一に、ゲージ理論の4次元トポロジーへの応用の範囲を広げること、また第二に、大域解析的メカニズムが幾何学化されることによって、底空間の4次元多様体上で、不変量の局所化の現象を取り扱う自由度が増大する。

3. 研究の方法

(1) 研究分担者加藤毅、連携研究者による連携とともに、当科学研究費の補助および雇用等による研究協力として、若手研究者の方々、特に、中村信裕、笹平史裕、塚本真輝、松尾信一郎、二木昌宏の諸氏の寄与を得た。

(2) 2007 年度は研究集会「低次元幾何学と無限次元幾何学」(世話人：山田裕一、笹平史裕、古田幹雄。講演者：本田 公、塚本真輝、田中利史、安井弘一、中村信裕、加藤毅、丹下基生)を開催した。ソウル大学の Jongil-Park 氏、ミネソタ大学の Tian-Jun Li 氏が来日し、東大において共同研究が行われた。当研究は当初は非線型方程式の解空間のモジュライ空間が主たる対象であったが、その基礎となるべき線形方程式の解について、次

に述べる研究の進展があり、この後当研究の大きなウェイトを担うものとなる。古田は吉田尚彦、藤田玄の両氏との共同研究により、トラス束構造をもつ多様体に対して Dirac 型作用素の局所化現象を見出した。

(3) 2008 年度は当補助金の部分的サポートにより、原則として毎月一回、京大と東大において交互にワークショップ「ゲージ理論関数解析セミナー」が行われた。連携研究者(当時)の加藤毅氏の研究発表とそれに関連する領域を中心とする講演・議論が行われた(講演者：橋本義武氏他)。

(4) 2009 年度は「キャッソン・フリードマン理論研究会」(世話人：山田裕一、加藤毅、古田幹雄、講演者：川村一宏、松橋英市、矢ヶ崎達彦、上正明、山田裕一、松尾信一郎、丹下基生、田中心、田中利史、山田翔平、安井弘一、中村信裕、山崎正之)が開催された。研究代表者が MIT およびミネソタ大学に滞在し、特に Tian-Jun Li 氏との共同研究を行った。

(5) 2010 年度はブランダイス Ruberman 教授を招聘し加藤毅の主催により連続公演・ワークショップを開催した。

(6) 代表者古田、連携研究者亀谷幸生を中心として原則として毎週一回ゲージ理論に関するセミナーが東大および慶応大で行われ、周辺の研究者の協力のもと、議論を行った。議論によって周辺の研究の活性化を図り、翻って当研究へのフィードバックを得ることが目的であった。実際、セミナー参加者のひとりである清野和彦氏は、セミナーの影響下で可微分化不可能な群作用の無限族を見出したが、これは当研究のひとつの応用の可能性を指し示すものとなった。

4. 研究成果

(1) 古田は吉田尚彦、藤田玄の両氏との共同研究を行い、トラス束構造をもつ多様体に対して Dirac 型作用素の局所化現象を研究した。参加者の各々の問題意識から行われた当共同研究において、当研究課題に即した側面として、特に局所化の K ホモロジー的な理解が挙げられる。

① 典型例として、可積分系の Riemann-Roch 数が、各々の Bohr-Sommerfeld 軌道および特異ファイバーに由来する「局所 Riemann-Roch 数」の総和として記述されることを見出した。これは量子力

学における半古典近似のある部分の数学的精密化と解釈される。

- ② 一般化として、異なる次元のファイバーをもつトーラス束構造が局所的に互いに両立しながら与えられる場合に、局所化が成立することを示した。
- ③ ひとつの応用として、トーラス作用に対する Guillemin–Sternberg の量子化予想の別証明を与えた。
- ④ 特異ファイバーの例として標準的計量をもつ球面の測地流に対する局所 Riemann–Roch 数を計算した。
- ⑤ 幾何学的に興味ある応用例として、Verlinde 公式の特殊な場合(種数 2 の閉曲面上 $SO(3)$ 束)のひとつのアプローチが与えられる。

(2) 古田と Tian-Jun Li 氏との共同研究において、安定ホモトピー–Seiberg–Witten 不変量の、Pontrjagin–Thom 構成を用いた定式化の研究が進められた。

- ① 安定ホモトピーおよび安定子ホモトピーを統合した不変量の局所係数版が、求める定式化の有限次元モデルとして適切であることが見出された。
- ② Pontrjagin–Thom 構成を利用することによって、4 次元多様体の連結和に対する「Bauer の連結和公式」の直接的な別証明を与えることができた。

(3) Seiberg–Witten モノポール方程式の拡張として局所係数付き SW モノポール方程式を構成した。これによって Seiberg–Witten 理論の適用範囲が広がった。

- ① 古田によって、関連する不変量の和公式に関して、予想が定式化され、証明が部分的に行われた。
- ② 応用として当科研究費によって雇用された中村信裕氏により、非単連結 4 次元多様体の局所係数付き交叉形式に関する新しい制限が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件)

- ① Fujita, Hajime; Furuta, Mikio; Yoshida, Takahiko Torus fibrations and localization of index I–polarization and acyclic fibrations. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17 (2010), no. 1, 査読有
- ② Hayashi, Shuhei An extension of the ergodic closing lemma. Ergodic Theory

Dynam. Systems 30 (2010), no. 3, 773–808. 査読有

- ③ Hayashi, Shuhei Applications of Mane’s C2 connecting lemma. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 4, 1371–1385. 査読有
- ④ Tsuboi, Takashi On the group of real analytic diffeomorphisms. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 42 (2009), no. 4, 601–651. 査読有
- ⑤ Tsuboi, Takashi On the uniform simplicity of diffeomorphism groups. Differential geometry, 43–55, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009. 査読有
- ⑥ Ue, Masaaki The Fukumoto–Furuta and the Ozsvath–Szabo invariants for spherical 3-manifolds. Algebraic topology—old and new, 121–139, Banach Center Publ., 85, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2009, 査読有
- ⑦ Kawazumi, Nariya On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces. Groups of diffeomorphisms, 383–400, Adv. Stud. Pure Math., 52, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008. 査読有
- ⑧ Kawazumi, Nariya Twisted Morita–Mumford classes on braid groups. Groups, homotopy and configuration spaces, 293–306, Geom. Topol. Monogr., 13, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008. 査読有
- ⑨ Akita, Toshiyuki; Kawazumi, Nariya Integral Riemann–Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 144 (2008), no. 2, 411–421. 査読有
- ⑩ Bene, Alex James; Kawazumi, Nariya; Penner, R. C. Canonical extensions of the Johnson homomorphisms to the Torelli groupoid. Adv. Math. 221 (2009), no. 2, 627–659. 査読有
- ⑪ Kato, Tsuyoshi Deformations of real rational dynamics in tropical geometry. Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 3, 883–901, 査読有
- ⑫ Tsuboi, Takashi On the uniform perfectness of diffeomorphism groups. Groups of diffeomorphisms, 505–524, Adv. Stud. Pure Math., 52, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008. 査読有
- ⑬ Tsuboi, Takashi On the simplicity of the group of contactomorphisms. Groups of diffeomorphisms, 491–504, Adv.

- Stud. Pure Math., 52, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, 査読有
- ⑭ Yokoyama, Tomoo; Tsuboi, Takashi Codimension one minimal foliations and the fundamental groups of leaves. Ann. Inst. Fourier 58 (2008), no. 2, 723--731. 査読有
- ⑮ Kato, Tsuyoshi Growth of Casson handles and transversality for ASD moduli spaces. Geom. Topol. 12 (2008), no. 3, 1265--1311. 査読有
- ⑯ Furuta, Mikio; Kametani, Yukio; Matsue, Hirofumi; Minami, Norihiko Homotopy theoretical considerations of the Bauer-Furuta stable homotopy Seiberg-Witten invariants. Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003), 155--166, Geom. Topol. Monogr., 10, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007. 査読有
- ⑰ Furuta, Mikio; Kametani, Yukio; Minami, Norihiko Nilpotency of the Bauer-Furuta stable homotopy Seiberg-Witten invariants. Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003), 147--154, Geom. Topol. Monogr., 10, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007. 査読有
- ⑱ Minami, Norihiko A possible hierarchy of Morava K-theories. Elliptic cohomology, 255--264, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 342, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007. 査読有
- ⑲ Hayashi, Shuhei Hyperbolicity, heterodimensional cycles and Lyapunov exponents for partially hyperbolic dynamics. Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.) 38 (2007), no. 2, 203--218. 査読有
- ⑳ Tamaki, Dai On the El-term of the gravity spectral sequence. Proceedings of the Nishida Fest (Kinosaki 2003), 347--382, Geom. Topol. Monogr., 10, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007. 査読有

[学会発表] (計4件)

- ① 坪井 俊: "多様体の微分同相群" 日本数学会秋季総合分科会. (20080925). 東京工業大学
- ② 古田 幹雄: "局所化とトラス束" 日本数学会年会トポロジー分科会. (20100324). 慶應大学
- ③ M. Furuta: "Torus fibration and localization of Riemann-Roch number" Gauge theory and Topology seminar. (20081010). Harvard University

- ④ 古田 幹雄: "Pontrjagin-Thom construction and non-linear Fredholm theories" Algebraic Topology: Old and New-M. M. Postnikov Memorial, Poland Conference, Stefan Banach International Mathematical Center, (20070619). Bedlewo (ポーランド)

[図書] (計1件)

- ① 古田 幹雄: "Index Theorem 1" American Mathematical Society, Providence, RI. (2007)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古田 幹雄 (FURUTA MIKIO)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 50181459

(2) 研究分担者

加藤 毅 (KATO TSUYOSHI)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号: 20273427

(3) 連携研究者

坪井 俊 (TSUBOI SHUN)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40114566
上 正明 (UE MASAOKI)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号: 80134443
南 範彦 (MINAMI NORIHIKO)
名古屋工業大学・工学研究科・教授
研究者番号: 80166090
亀谷 幸生 (KAMETANI YUKIO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 70253581
林 修平 (HAYASHI SHUHEI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 20247208
河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30214646
玉木 大 (TAMAKI DAI)
信州大学・理学部・教授
研究者番号: 10252053

(4) 研究協力者

清野 和彦 (KIYONO KAZUHIKO)
東京大学・大学院数理科学研究科・助教
研究者番号: 40234398
吉田 尚彦 (YOSHIDA TAKAHIKO)
明治大学・研究員
研究者番号: 70451903
藤田 玄 (FUJITA HAJIME)
学習院大学・理学部・助教
研究者番号: 50512159

中村信裕 (NAKAMURA NOBUHIRO)
東京大学・大学院数理科学研究科・特任助
教
研究者番号 : 10512171