

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340018

研究課題名（和文） 可微分写像の大域的特異点論とその応用

研究課題名（英文） Global Theory of Singularities of Differentiable Maps and its Applications

研究代表者

佐伯 修 (SAEKI OSAMU)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：30201510

研究代表者の専門分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：多様体，可微分写像，特異点，可微分構造，特異ファイバー，曲面絡み目，位相不変量，特性類

#### 1. 研究計画の概要

多様体間の可微分写像やその特異点についての研究は、20世紀中ごろのホイットニーやトムに始まりその後大きな発展を遂げた。特に可微分写像の局所的性質（ある点のまわりでの性質）が多く研究され、現在では多くの理論・道具が確立されている。しかし、多様体の本質的構造に関わる大域的性質（写像全体としての性質）の研究は、重要であるにもかかわらずあまりなされてこなかった。一方、可微分多様体論に関しては、1970年代までに5次元以上の高次元多様体論がかなり発展し、その中で興味深い事実が次々と発見されていった。特に一つの位相多様体の上に複数の可微分構造が入り得ることが多くの例とともに発見され、微分位相幾何学の世界に大きな衝撃を与えた。さらに最近では4次元多様体に関する研究が進み、上のような現象が高次元に比べるとさらに頻繁に起こり、むしろその方が自然であるという状況すら明らかにされてきている。しかし可微分構造の分類といった重要な問題は未解決のまま残されている。

このように可微分多様体論は盛んに研究されてきたわけであるが、可微分写像の大域的特異点論の立場からの研究は、重要であるにもかかわらずほとんどなされてきていない。ところが最近小生らのグループによる研究により、実数に値を取る関数ではなく、多様体に値を取る写像とその特異点を本質的に用いることにより、可微分構造に関する情報が取り出せる例が発見された。これらの結果により、可微分構造の究明に、多様体間の

写像とその特異点の研究が大変重要であることがあらためて浮き彫りになったと言える。

しかし、こうした研究には解決すべき問題が山積している。それは、特異点の局所的性質とは本質的に異なる興味深い現象が大域的研究の中で発見されてきているものの、それらを大きな枠組みの中で統括的に扱えるような理論が未だに現われていないことからもうかがえる。

そこで本研究では、大域的特異点論の種々の重要な未解決問題を、これまでにない統一的観点から、より大きな枠組みの中で解決してゆくことを目的とする。さらに、そうした結果を応用して、微分位相幾何学の種々の重要な問題を解決する。

#### 2. 研究の進捗状況

(1) 多様体間の可微分写像に対し、特異ファイバーを用いて定義される値域多様体のコホモロジー類が多様体の特性類で表せることを、分類空間を用いて示し、重要な具体例について完全に記述することに成功した。

(2) 単体写像に関するオイラー標数公式を、値域の各頂点に指数を定義する形で再定式化し、それを可微分多様体間の安定写像に対して応用して、新しい公式をいくつか得た。

(3) 4次元空間内の曲面絡み目を、平面への射影を通して研究するための基礎理論を構築した。応用として、法オイラー数に関する合同式の新しい証明を得た。また全幅という不変量を定義し、これが8となる曲面結び目を、2橋結び目のツイストスパンとして完全

に特徴付けることに成功した。

(4) 可微分多様体から円周へのモース写像の、折り目写像による同境分類を完全な形で与え、その応用として、平面への可微分写像芽を安定摂動したときに現れるカスプの符号付き個数が位相不変量となることを示した。

(5) 折り目写像の存在問題を考え、それをある種の連続写像のリフトの存在問題に帰着し、ポストニコフ分解の観点から障害類を調べ、いくつかの具体的な場合にそれらを特性類で完全に記述することに成功した。

(6) 4次元有向同境群が無限巡回群となることを、3次元ユークリッド空間への安定写像の特異ファイバーを調べることによって示し、系として、特異ファイバーの符号数定理の見通しの良い別証明を与えた。

(7) 開4次元多様体で3次元多様体へのプロパー・スペシャル・ジェネリック写像を許容するものについて調べ、単連結な場合に微分同相類の完全な特徴づけを得た。特に4次元ユークリッド空間と同相なものがそうした写像を許容すれば、4次元ユークリッド空間と微分同相となることを示した。

以上のように、当研究は当初の目標通り着実に進捗している。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

特異ファイバーの分類空間を用いたり、曲面結び目の平面射影の基礎理論を構築したり、より大きな枠組みの中で研究を進め、着実に結果を得ているため。

### 4. 今後の研究の推進方策

(1) 多様体の可微分構造と可微分写像の特異点の関係について、特に特異ファイバーの大域的な消去可能性と可微分構造の関係について、高次元多様体の可微分構造の観点、同境理論の観点、及びホモトピー論的障害類の観点から、研究を押し進める。また単純な特異点しか持たない写像と多様体の可微分構造との関係について、非コンパクト多様体などの新たな観点から研究を行う。

(2) 多様体対、特に埋め込みとはめ込み、それらの射影に現れる特異点や多様体の可微分構造との関係について研究してゆく。さらに埋め込みやはめ込みの不変量の構成についても、ポントリャーギン-トム構成の視点を用いるなど、新たな観点から研究を行う。またそうして得られる不変量について、3次元多様体の場合に、既存の量子不変量との関係を明らかにする。

(3) 多様体間の可微分写像について、多様体と写像のファイバーの位相との関係について調べるため、研究を進める。特に下の(5)

への応用を見込み、非特異ファイバーの連結成分の同境類に着目した研究を行う。

(4) ジェネリックな写像の具体的なかつ組織的な構成理論について、これまでの手法を整理しつつ研究を進める。その際、次の(5)に挙げる手法との関連も考慮する。

(5) 多様体の微分幾何的構造の特異構造への一般化を研究する。特に、4次元多様体上のレフシェッツ構造を、特異点を持ったものにまで対象を広げて考え、多様体の可微分構造との関連について研究する。また、そうした対象に対して、特異ファイバーに着目することにより不変量が構成できないか研究を行う。さらに、複素超曲面の特異点の周りに現れるミルナー束の場合について、既存の不変量との関係を調べるため研究を進める。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

- ① O. Saeki, Singular fibers and 4-dimensional cobordism group, to appear in Pacific J. Math., 査読有.
- ② O. Saeki, Special generic maps on open 4-manifolds, Journal of Singularities, Vol.1 (2010), 1-12, 査読有.
- ③ K. Ikegami and O. Saeki, Cobordism of Morse maps and its application to map germs, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.147 (2009), 235-254, 査読有.
- ④ O. Saeki and Y. Takeda, Surface links and their generic planar projections, J. Knot Theory Ramifications, Vol.18 (2009), 41-66, 査読有.
- ⑤ O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers and characteristic classes, Topology Appl., Vol.155 (2007), 112-120, 査読有.

[学会発表] (計 23 件)

- ① 佐伯修, 特異点と特性類 — 具体例の果たす重要な役割, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会企画特別講演, 東北大学, 2007 年 9 月 21 日.

[図書] (計 1 件)

- ①若山正人 他 (計 6 人), 岩波書店, 技術に生きる現代数学, 2008 年, 175~204 ページ

[その他]

ホームページ

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~saeki/index-j.html>