

平成22年 5月10日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19340024

研究課題名 (和文) 代用電荷法と数値等角写像に関する研究

研究課題名 (英文) Research on the Charge Simulation Method and the Numerical Conformal Mapping

研究代表者

天野 要 (AMANO KANAME)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80113512

研究成果の概要 (和文)：代用電荷法を適用し，非有界な多重連結領域から，(a)平行／共線スリット領域，(b)直線スリット領域，(c)円弧放射スリット領域，という正準スリット領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証した．また，代用電荷法の性質を調べ，周期 Stokes 方程式に対する基本解法を提案した．これらの研究は理工学への応用上も重要である．本研究の主題に関連の深い特異積分方程式，悪条件連立1次方程式の数値解法についての基礎的研究も進められた．

研究成果の概要 (英文)：Using the charge simulation method, we proposed the method of numerical conformal mappings of unbounded multiply connected domains onto the following canonical slit domains: (a) the parallel and the colinear slit domains, (b) the linear slit domain and (c) the circular and radial slit domain; and showed the effectiveness of our method. We studied the property of the charge simulation method, and proposed a fundamental solution method for periodic Stokes flow problems. These are important in scientific and engineering applications. Basic studies on numerical methods for singular integral equations and ill-conditioned linear equations are progressed, which are closely related to the subject of this study.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
総計	5,000,000	1,500,000	6,500,000

研究分野：数値解析学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：数値数学，複素解析，代用電荷法，基本解，数値等角写像

## 1. 研究開始当初の背景

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり，物理学や工学への応用も広い。しか

し，その写像関数を厳密に記述できる場合は限られている。このような理由で，数値等角写像 (Numerical Conformal Mapping, 等角

写像の数値計算)は計算数学における重要な課題として海外では古くから研究されていた。一方、代用電荷法 (Charge Simulation Method), または基本解法 (Fundamental Solution Method) は、電気工学の分野でポテンシャル問題の高精度高速解法として知られていた。その原理は、例えば2次元 Laplace 方程式の解を対数ポテンシャル (基本解) の1次結合で近似して、その未定係数を与えられた境界条件が選点的に満たされるように定める、というものである。

申請者は1980年代に代用電荷法を用いた数値等角写像の方法を提案した。その後、代用電荷法と数値等角写像の研究は相互に影響しながら我が国で発展してきた。代用電荷法による数値等角写像の特徴は、表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与え、曲線境界や非有界領域の問題にも適していることである。研究すべき課題は多い。

## 2. 研究の目的

本研究は、代用電荷法と数値等角写像を中心に、基本解の重ね合わせという古典的な方法を現代的な科学技術計算の方法として発展させることを大きな目標としている。当初の目的は次の通りであった。

(1) 代用電荷法による数値等角写像：代用電荷法が解析関数の近似法として有効であることを幾つかの問題に適用して実証する。

(2) 代用電荷法：代用電荷法の3次元問題への適用性、基本解の重ね合わせという原理の Laplace 方程式以外の偏微分方程式への拡張性等について研究する。

(3) 数値等角写像：様々なポテンシャル問題への適用性を検討する。また、問題向きの数値解法である代用電荷法と汎用的数値解法である有限要素法とのハイブリッド計算のような新しい課題に取り組む。

(4) 数学ソフトウェア：代用電荷法による数値等角写像の方法で等角写像のための数学ソフトウェアを開発する。

## 3. 研究の方法

研究代表者の天野と研究分担者の岡野、緒方、杉原はいずれも数値解析が専門で、代用電荷法と数値等角写像を重要な研究課題とし、それぞれが得意とするところで協力して多くの研究を共同で行ってきた。土屋も数値解析が専門で、有限要素法による数値等角写像や極小曲面の問題を扱ってきた。それぞれの役割分担 (得意とするところ) は次のとおりである。

- ・天野：代用電荷法による数値等角写像の方法の提案と数値実験
- ・岡野：代用電荷法に関する理論と数値実験
- ・緒方：代用電荷法の拡張 (基本解法)
- ・杉原：数値解析の理論的支援

・土屋：有限要素法

なお、途中からプログラミングに堪能な遠藤が連携研究者として加わった。

## 4. 研究成果

下記の(1)~(3)はいずれも代用電荷法を適用して非有界な多重連結領域から正準スリット領域への数値等角写像 (写像関数を  $w = f(z)$ , 近似写像関数を  $F(z)$  と記す) の方法を提案したものである。多重連結領域の正準スリット領域としては、(a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域、(d) 円弧スリット円板領域、(e) 円弧スリット円環領域が広く知られている (Nehari, 1952)。遡って、Koebe (1916) はこれらを含む39種の正準スリット領域を挙げている。近年、このような多重連結領域の等角写像が新たな注目を集めている。代用電荷法の適用によって、応用上も重要な Nehari の5種を含む Koebe の正準スリット領域 1)~13) への統合的な数値等角写像が可能になると期待される。

(1) 平行/共線スリット領域への数値等角写像：①  $f(\infty) = \infty$  という条件で、非有界な多重連結領域から一般的な (スリットの角度を任意に指定した) 平行スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した (図1)。この等角写像は、応用上、障害物を過ぎる一様ポテンシャル流の解析に重要である。研究の新規性は、一般的な平行スリット領域への簡潔で精度の高い近似写像関数の直接的な構成法を与え、さらに得られた近似写像関数を用いて写像定理に現れる Laurent 級数の全ての展開係数を簡単かつ高精度に計算する方法を与えたことにある。

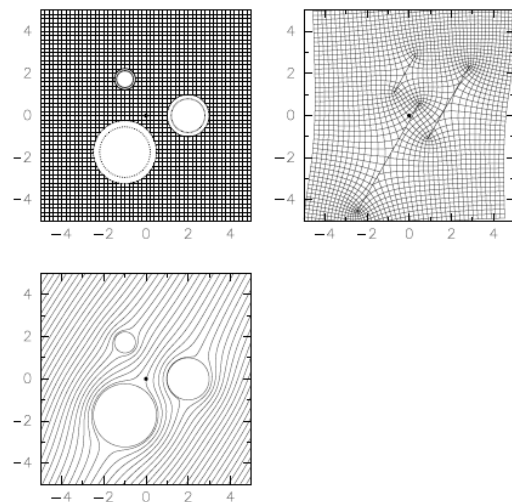


図1：平行スリット領域への数値等角写像と一様流

②  $f(v) = \infty$  ( $|v| < \infty$ ) という異なる条件で、同じ非有界な多重連結領域から平行スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した (図 2). この等角写像によって障害物の周囲の 2 重湧き出し流の解析が可能になった.

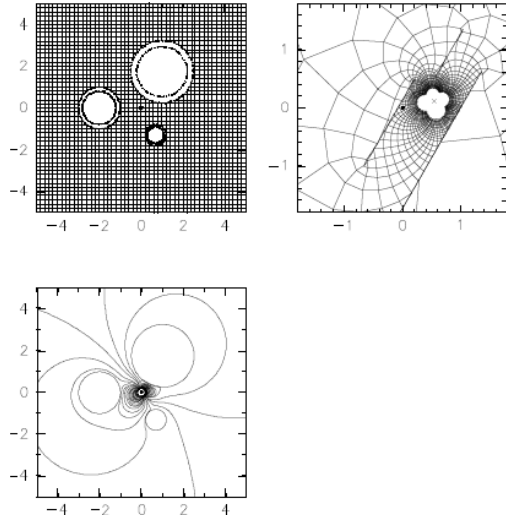


図 2: 平行スリット領域への数値等角写像と 2 重湧き出し流

③  $f(\infty) = \infty$  という条件で、非有界な 2 重連結領域から共線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した (図 3). 共線スリット領域とは 2 本のスリットが一直線上に存在する特別な平行スリット領域で、この場合のスリットが実軸となす角は問題領域に対して定まる未知の定数である. この等角写像は境界適合型の格子生成への応用が期待される.

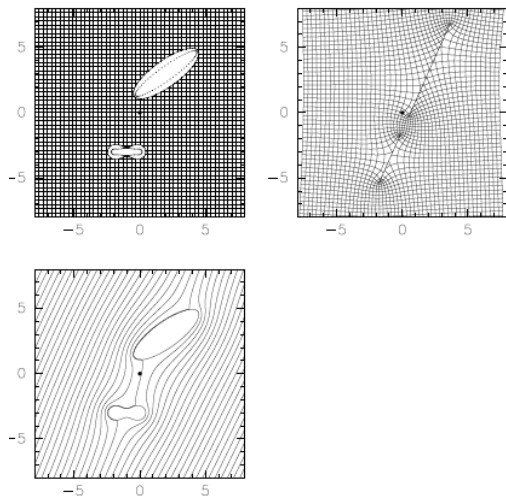


図 3: 共線スリット領域への数値等角写像と一様流

(2) 直線スリット領域への数値等角写像:  $f(\infty) = \infty$  という条件で、非有界な多重連結

領域から一般的な (個々のスリットの角度を任意に指定した) 直線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した (図 4). この問題は平行スリット領域の場合の一般化であり, Shiba (J. Math., Kyoto Univ., 1971) によって研究された. Koebe (1916) にも記述されていない. この研究が次の成果への糸口となった.

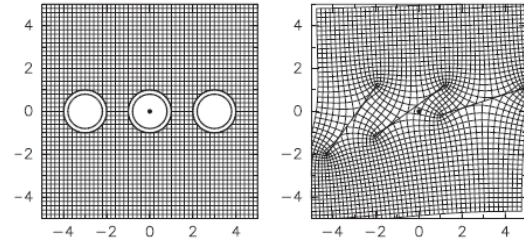


図 4: 直線スリット領域への数値等角写像

(3) 円弧放射スリット領域への数値等角写像: 非有界な多重連結領域から円弧放射スリットと放射スリットが混在する領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した (図 4). 問題は Koebe の 8) に相当し, 方法は Amano (SIAM J. Sci. Comput., 1998) の一般化である. 図 5 は数値等角写像の結果と  $\log|F(z)|$ ,  $\arg F(z)$  の等高線である. 物理的には, 原点に線熱源が存在し, 周囲に超熱伝導体と断熱体が混在する場合の等温線と熱流線を表現している.

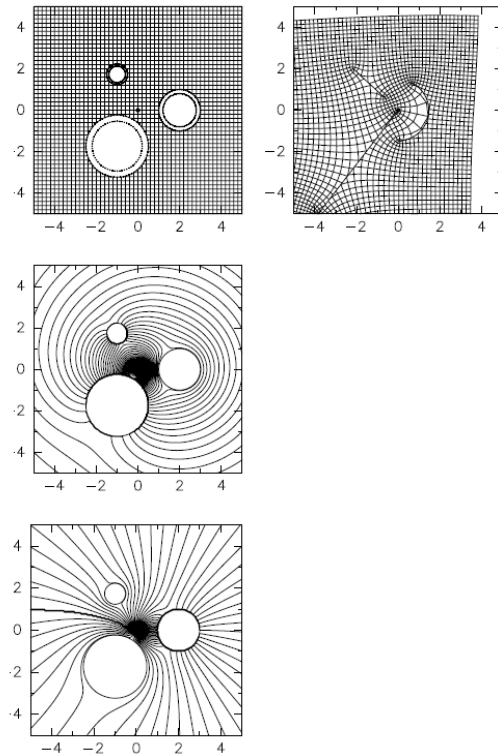


図 5: 円弧放射スリット領域への数値等角写像と熱流

なお、以上の方法の一部は Scilab 上の Toolbox として実装されている。

(4) 代用電荷法：多重連結領域の代用電荷法について、境界閉曲線毎の誤差のふるまいが単連結領域の代用電荷法と似ていることから、等角写像を利用して構成した基本解の重ね合わせによる代用電荷法を提案し、単連結の場合と同様に高い精度の近似解が得られるようになった。また、3次元の代用電荷法について、球面上の標本点配置の一様性を利用した電荷点・拘束点配置の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した。

(5) 代用電荷法の拡張（基本解法）：①1次元周期的に配列された無限個の障害物を過ぎる2次元 Stokes 流に対し、Stokes 方程式の周期的基本解に基づく基本解法を開発した。また、1次元空間周期的なポテンシャル問題に対し、Laplace 方程式の周期的基本解に基づく境界要素法を開発した。さらに、ポテンシャル問題の数値解法として近年開発された複素変数境界要素法を周期的ポテンシャル問題に拡張した。複素変数境界要素法は複素関数論における Cauchy の積分公式を境界積分方程式として、それを数値的に解いて解を求めるという方法である。具体的には、この Cauchy の積分公式を周期的解析関数の場合書き直して周期的ポテンシャル問題に拡張し、その有効性を数値実験で確認した。

②波動問題（Helmholtz 方程式）に対する代用電荷法の性質を、理論・数値実験の両面から調べ、すでに様々な性質が知られているポテンシャル問題に対する代用電荷法と比較・検討した。その結果、円外領域波動問題については、代用電荷法の近似解が指数関数的に真の解に収束し、収束の速さのオーダーがポテンシャル問題に対する代用電荷法と同じであることが理論解析・数値実験により確認された。さらに、数値実験から、ポテンシャル問題に対する代用電荷法の性質が、波動問題を含め様々な偏微分方程式問題に対し普遍的に成り立つことが予想されることがわかった。

(6) 有限要素法：自由境界問題（ダム問題）に対する反復解法について検討し、ここに現れる Hadamard 変分の第1変分、第2変分の導出と計算に成功した。また、多様体上の有限要素解析の可能性について検討し、曲面上の領域で楕円型境界値問題に対する有限要素法の適用が可能であることがわかった。特に、これまで土屋によって有限要素スキームの開発と数学的基礎付けが研究されてきた極小曲面の問題に代用電荷法を適用することを検討した。

(7) 数値解析の理論的研究：数値等角写像の方法として特異積分方程式を用いるものがある。この方程式を解くための Sinc 法の提案と、その誤差解析を行った。また、代用電荷法において、悪条件の連立一次方程式を解く必要が生じる。そのための方法として、特異値分解による方法やクリロフ部分空間法に関する研究を進めた。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 27 件）

(1) Amano, K., Okano, D., Ogata, H. and Sugihara, M.: Numerical conformal mapping by the charge simulation method, Proceedings of ICoMS 2007 (2nd International Conference on Mathematical Sciences), 査読有, 掲載決定.

(2) Okano, D., Li Tao and Amano, K.: Error estimation in the charge simulation method for two and three dimensional potential problems, Proceedings of ICoMS 2007 (2nd International Conference on Mathematical Sciences), 査読有, 掲載決定.

(3) Amano, K. and Okano, D.: A circular and radial slit mapping of unbounded multiply connected domains, JSIAM Letters, 査読有, 掲載決定.

(4) Ogata, H. and Amano, K.: Fundamental solution method for two-dimensional stokes flow problems with one-dimensional periodicity, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, 掲載決定.

(5) Okayama, T., Matsuo, T. and Sugihara, M.: Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, 掲載決定.

(6) Amano, K.: Numerical conformal mappings of multiply connected domains by the charge simulation method, Proceedings of The Fifth International Conference on Information, 査読有, pp.41-46 (2009).

(7) Li, T., Okano, D. and Amano, K.: A numerical conformal mapping onto the collinear slit domain, Proceedings of The Fifth International Conference on Information, 査読有, pp.79-82 (2009).

(8) 天野 要, 李 涛, 遠藤慶一, 岡野 大: 代用電荷法による平行/共線スリット領域への数値等角写像, 情報処理学会論文誌 コンピューティングシステム, 査読有, Vol.2, pp.83-94 (2009).

- (9) 天野 要, 鳳 弘勝, 李 涛, 遠藤慶一, 岡野 大: 代用電荷法による直線スリット領域への数値等角写像, 情報処理学会論文誌, 査読有, Vol. 50, pp. 1775-1779 (2009).
- (10) Li, T., Okano, D. and Amano, K.: A numerical conformal mapping onto the parallel slit domain and the Laurent expansion of mapping functions, Information, 査読有, Vol. 11, pp. 191-203 (2008).
- (11) 天野 要, 岡野 大, 李 涛, 鳳 弘勝: 代用電荷法による直線スリット領域への数値等角写像, 京都大学数理解析研究所講究録 1618, 査読無, pp. 127-141 (2008).
- (12) Ogata, H.: Complex variable boundary element method for two-dimensional potential problems with one-dimensional periodicity, Numerical Analysis and Applied Mathematics, American Institute of Physics, Melville, New York, 査読有, pp. 411-414 (2008).
- (13) Aishima, K., Matsuo, T., Murota, K. and Sugihara, M.: On convergence of the dqds algorithm for singular value computation, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 査読有, Vol. 30, pp. 522-537 (2008).
- (14) 岡野 大, 杉原正顯, 天野 要: 3次元代用電荷法の誤差の収束について—球面の場合, 京都大学数理解析研究所講究録 1573, 査読無, pp. 1-12 (2007).
- (15) 緒方秀教: 1次元周期的2次元 Stokes 流に対する基本解法, 京都大学数理解析研究所講究録 1566, 査読無, pp. 119-131 (2007).

[学会発表] (計 61 件)

- (1) Tsuchiya, T.: Topics on finite element methods on Riemannian manifolds, International Workshop on Numerical Verification and its Application, Hotel Lido Azzurro, 東京都八丈島 (2010 年 3 月 14 日).
- (2) 天野 要: 代用電荷法による数値等角写像, 組織的な大学院教育改革プログラム「理系の実践型女性科学者育成」院生企画セミナーII, 奈良女子大学 (2009 年 12 月 7 日).
- (3) Tsuchiya, T.: An iterative scheme for a free boundary problem defined with Hadamard variation, Dagstuhl Seminar 09471, "Computer-Assisted Proofs - Tools, Methods and Applications", Dagstuhl, Germany (2009 年 11 月 19 日).
- (4) Amano, K.: Numerical conformal mappings of multiply connected domains by the charge simulation method (invited keynote talk), The Fifth International Conference on Information, 京都大学

(2009 年 11 月 6 日).

- (5) 天野 要, 岡野 大: 非有界な多重連結領域から円弧/放射スリット混在領域への数値等角写像, 日本応用数理学学会年会, 大阪大学 (2009 年 9 月 28 日).
- (6) 岡野 大, 中橋 彬, 北野雄也, 遠藤慶一, 天野 要: メッシュノルムによる代用電荷法の電荷点・拘束点配置評価, 日本応用数理学学会環瀬戸内応用数理解析研究部会第 13 回シンポジウム, 徳島大学 (2009 年 9 月 12 日).
- (7) Amano K., Okano D., Ogata H. and Sugihara M.: Numerical conformal mappings onto the linear slit domain, SIAM Annual Meeting, Colorado Convention Center, Colorado (2009 年 7 月 6 日).
- (8) Tsuchiya, T.: An iterative scheme for a free boundary problem defined with Hadamard variation, Invited Workshop: Verified Computation of Solutions for PDE and Related Topics, in International Conference on Engineering and Computational Mathematics, Hong Kong Polytechnic University (2009 年 5 月 28 日).
- (9) 岡野 大, 鳳 弘勝, 天野 要: 代用電荷法による多重連結領域の数値等角写像における誤差のふるまいについて, 日本応用数理学学会年会, 東京大学 (2008 年 9 月 18 日).
- (10) 天野 要, 鳳 弘勝, 李 涛, 岡野 大: 代用電荷法による平行スリット領域への数値等角写像, 日本応用数理学学会年会, 東京大学 (2008 年 9 月 19 日).
- (11) 天野 要, 鳳 弘勝, 李 涛, 岡野 大: 代用電荷法による直線スリット領域への数値等角写像, 京都大学数理解析研究所研究集会「再生核の応用についての研究」(2008 年 9 月 11 日).
- (12) Okano, D., Amano, K., Ogata, H. and Sugihara, M.: Numerical conformal mappings of multiply connected domains by the charge simulation method, SIAM Annual Meeting, Town and Country Resort & Convention Center, San Diego (2008 年 7 月 9 日).
- (13) 天野 要, 鳳 弘勝, 李 涛, 岡野 大: 代用電荷法による平行スリット領域への数値等角写像, 第 37 回数値解析シンポジウム, たざわこ芸術村 (2008 年 6 月 14 日).
- (14) 相島健助, 松尾宇泰, 室田一雄, 杉原正顯: 特異値計算アルゴリズム dqds 法の収束定理, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「計算科学の基盤技術としての高速アルゴリズムとその周辺」, 京都大学 (2007 年 11 月 14 日).
- (15) 天野 要, 岡野 大, 鳳 弘勝, 柴 雅和: 直線スリット領域への数値等角写像の方法, 日本応用数理学学会年会, 北海道大学 (2007 年 9 月 17 日).

(16) 岡野 大, 李 涛, 天野 要: 等角写像を前処理に用いた代用電荷法, 日本応用数学会年会, 北海道大学 (2007年9月17日).

(17) Amano, K., Okano, D., Ogata, H. and Sugihara, M.: Numerical conformal mappings by the charge simulation method (invited keynote lecture), IcoMS2 (2nd International Conference on Mathematical Sciences), UTM, Malaysia (2007年5月29日).

(18) Okano, D., Li, T. and Amano, K.: Error estimation in the charge simulation method for two and three dimensional potential problems, IcoMS2 (2nd International Conference on Mathematical Sciences), UTM, Malaysia (2007年5月29日).

[図書] (計1件)

(1) 杉原正顕, 室田一雄: 線形計算の数理, 岩波書店, 2009, 377.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

天野 要 (AMANO KANAME)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 80113512

### (2) 研究分担者

岡野 大 (OKANO DAI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 90294785

(H21: 連携研究者)

土屋 卓也 (TUCHIYA TAKUYA)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 00163832

(H21: 連携研究者)

緒方 秀教 (OGATA HIDENORI)

電気通信大学・電気通信学部・准教授

研究者番号: 50242037

杉原 正顕 (SUGIHARA MASA AKI)

東京大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号: 80154483

(H20→H21: 連携研究者)

### (3) 連携研究者

遠藤 慶一 (ENDO KEIICHI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号: 10467847

(H20→H21)