

平成 22 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究(B)
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19340026
 研究課題名(和文) 超伝導やBEC現象の数理モデルにおける分岐構造と遷移ダイナミクスの解明
 研究課題名(英文) Mathematical studies for bifurcation structures and transient dynamics of model equations in the superconductivity and BEC
 研究代表者
 森田 善久(MORITA YOSHIHISA)
 龍谷大学・理工学部・教授
 研究者番号：10192783

研究成果の概要(和文)：

超伝導やボース-アインシュタイン凝縮とよばれる通常のスケールで観測される量子現象を、数学的にモデル化した方程式が知られている。Ginzburg-Landau 方程式はその代表的なモデル方程式である。このようなモデル方程式において、それらの現象を特徴的に表す運動(量子化された渦糸運動など)に対応する数学的な解の性質や構造を研究し、その結果として運動を表現する解が実際に存在し、また安定であることを数学的に示した。

研究成果の概要(英文)：

We investigate mathematical properties and structures of solutions to the model equations describing the superconductivity and Bose-Einstein condensation, which are typical macroscopic quantum phenomena. We obtained mathematical results on the bifurcation structure and the characteristic dynamics for the model equations such as the Ginzburg-Landau equations and other related equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2008 年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2009 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
年度			
総計	7,900,000	2,370,000	10,270,000

研究分野：応用解析(数学)

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：Ginzburg-Landau 方程式、渦糸解、遷移ダイナミクス、解の安定性、分岐解析、超伝導モデル、Gross-Pitaevskii 方程式、パターンダイナミクス

1. 研究開始当初の背景

超伝導やボース-アインシュタイン凝縮(BEC)では、量子現象がマクロな系でも観測され、その現象の解明のため、様々な数理モデルが提案されている。その代表的なモデル

ル方程式として超伝導の巨視的現象を記述した Ginzburg-Landau(GL)方程式と、BEC の Gross-Pitaevskii(GP)方程式が有名である。超伝導のGL方程式は非常に豊かな非線形構造をもっていることが1990年代からの数学的

な研究の発展によって明らかにされてきた。実際、超伝導やそれに関連した分野の数理モデルの研究は、数学的に深い問題を提供するだけでなく、「物質科学(マテリアルサイエンス)における数学的研究」、「変分法と偏微分方程式」、「非線形解析と数値計算法」の分野を横断する幅広い広がりを持ち、応用面でも重要である。しかし、数学的な研究が進むにつれて、その興味の中心は数学的な解の研究に注がれ、現象と関連づけられた数学の発展という点からは離れつつある傾向がある。

そこで、現象間をつなぐ横断的な研究や、時間発展モデルにおける現象に対応した解のダイナミクスの研究が遅れていることに着目し、このような問題が数学的にどのように問題設定できるか、またどのような手法が可能かを考察し、今回のようなテーマ設定に至った。

2. 研究の目的

本研究では、超伝導やボース-アインシュタイン凝縮(BEC)において磁場や回転などの外力をかけたときに実験やシミュレーションで観察される「現象の特徴的な変化」や「状態の時間的遷移」を、対応する数理モデルの研究を通して数学的に解明することを目的とする。このような現象を表現する数学的な解を調べ、その存在や安定性を数学的に明らかにすることを目指す。さらに、これらの数理モデルと関連したモデル方程式についても、その数理的構造からその共通性を明らかにし、普遍的な構造の解明を目指す。

3. 研究の方法

渦系の運動の遷移過程という具体的な現象に焦点を当て、まずその現象の特徴を明らかにし、それを数理的に解明する手法を考察する。

超伝導現象などで観測される渦系の運動では、境界から発生する渦系や、渦系の衝突・消滅について数値計算では確認できている。しかし、その遷移過程の数学的記述は容易ではない。このように状態が遷移する現象や、現象の境界領域の数学的な解明のために、数値計算と並行して分岐解析の手法を進展させる。現象に対応した数理モデルの設定と数値実験による分析；摂動法や本質的な構造を考慮して簡略化した縮約モデルの提案；渦系解の発生や消滅の遷移過程に対する分岐解析の開発と適用；ナノスケールにおける超伝導現象の数理モデルの研究などを組み合わせ研究を進める。

4. 研究成果

研究代表者の森田は、ある条件のもとでGinzburg-Landau(GL)方程式を考え、外部磁場をパラメータとしたとき渦系解が分岐する構造について研究した。その結果、境界から渦系解が出現するようなパラメータの条件を局所的に決定することができた。また、その遷移ダイナミクスについて、分岐解析を適用し、中心多様体上の有限次元のダイナミクスに縮約できることを示した。これによってダイナミクスを解析的に調べることに成功している。これらの結果は、渦系解の遷移過程について新しい数学的知見を与える成果である。さらにこの研究の発展として円環領域におけるGL方程式の分岐解の性質を調べた。円環領域という位相的に特徴の有る領域における渦系解の研究として注目に値する。

森田は研究分担者の神保と著書「ギンツブルク-ランダウ方程式と安定性解析」を書き上げた。この著書の中でこれまでのGL方程式の解に対する研究を整理し、結果を体系化した。和書では最初の本格的なGL方程式に関する数学的な成果をまとめたものである。物理的な背景も解説しており、今後の研究の展開を考える際にも役立つ。

一方、森田は分担者の小川と保存則のある反応拡散方程式系における局在パターンの発生に関する数学的構造を調べた。この系では非局所的効果が安定な局在パターンの生成に重要な働きをしていることが判明し、GLにおける渦系のような局在パターンとの関連性を検証中である。

神保はその共同研究者とともに特異的な領域変形においてノイマン境界条件下のラプラス作用素の固有値の漸近挙動を調べた。この成果はGL方程式の解の安定性に関する研究に応用できる可能性を持った研究である。

小川は、反応拡散方程式系の空間的に異なるモードが相互に関係する分岐について研究を進め、GL方程式と共通する分岐構造を研究した。さらにSwift-Hohenberg方程式において、境界条件の摂動によって解の分岐構造がどのように変化するかを調べた。

Swift-Hohenberg方程式の定常解の分岐はGL方程式と共通した構造を持つので、この研究成果はGL方程式の分岐解の研究にも発展が期待でき重要である。

町田は超伝導体に欠陥(defect)がある場合の時間依存のGL方程式や、超流動現象で複数のモードが強く相互作用する系において、渦系の特徴的なダイナミクスの詳細なシミュレーションを行った。並行して時間依存GL

方程式のシミュレーションコードの高度化を進め、磁束ダイナミクスの研究において未解決の基礎物性（ホール効果、磁束格子ダイナミクス等）の解明を目指して研究を行った。これらの成果は、超伝導の数値的および理論的研究の発展に貢献する成果である。

また、町田は様々な設定で現れるジョセフソン効果について、数値シミュレーションで実現しその特徴を検証した。特に高温超伝導体が固有に持つジョセフソン効果の量子効果を調べた。さらに電磁波発振特性を調べるため、ジョセフソン素子と環境の両方を同時にシミュレーションするコードを開発した。

一方、平成20年1月に鉄系化合物超伝導体が発見されたことを受け、その電子構造、超伝導対称性、磁束構造、ジョセフソン効果等についての理論研究についても町田は推し進めた。

水町は非線形シュレディンガー方程式（超流動ではGross-Pitaevskii方程式とよばれる）のソリトン解や、渦糸ソリトン解の安定性を研究した。

また、水町は非線形格子モデルにおけるソリトン解の線形安定性に関する数学的研究方法を発展させた。渦糸解の安定性の応用にも期待される興味ある結果である。さらに、Fermi-Pasta-Ulamの1次元格子模型の多パルス解について研究し、格子モデルがKdV方程式で近似される領域において安定性を証明した。また、KP-II方程式のline solitonの安定性について研究し変数について周期的な場合に安定性を証明した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計27件)

- [1] M. Machida, Y. Nagai, Y. Ohta, N. Nakai, H. Nakamura, N. Hayashi, Phenomenological Theory for $\pm s$ -wave Superconducting States of Iron-based Superconductors, Physica C, 査読有, (2010) 掲載確定.
- [2] M. Machida, Quantum Synchronization and Electromagnetic Wave Emission in intrinsic Josephson junctions, J. Phys. Conf. Ser. 査読有(2010)掲載確定.
- [3] Y. Martel, F. Merle, T. Mizumachi, Description of the inelastic collision of two solitary waves for the BBM equation, Arch. Ration. Mech. Anal. V

- ol.196 (2010), 517-574.
- [4] S. Jimbo, M. Kimura, H. Notsu, Exponential decay phenomena of the principal eigenvalue of an elliptic operator with a large drift term of gradient type, Asymptotic Analysis, 査読有, Vol.65 (2009), 103-123.
- [5] S. Jimbo, S. Kosugi, Spectra of domains with partial degeneration, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 査読有, Vol.16 (2009), 269-414.
- [6] Y. Morita, K. Tachibana, An entire solution to the Lotka-Volterra competition-diffusion equations, SIAM J. Math. Anal. 査読有, Vol.40 (2009), 2217-2240.
- [7] T. Ogawa, T. Okuda Bifurcation analysis to Swift-Hohenberg equation with Steklov type boundary conditions, 査読有, Vol.25 (2009), 273-297
- [8] T. Mizumachi, Asymptotic stability of lattice solitons in the energy space, Comm. Math. Phys. 査読有, Vol.288 (2009), 125-144
- [9] Y. Morita, H. Ninomiya, Monostable-type traveling waves of bistable reaction-diffusion equations in the multi-dimensional space, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), 査読有, Vol.3 (2008), 567-584.
- [10] Y. Morita, Bifurcation of vortex solutions to a Ginzburg-Landau equation in an annulus, Centre de Recherches Mathematiques, 査読無, Vol.44 (2008), 187-200.
- [11] Y. Morita, Bifurcation analysis for a Ginzburg-Landau equation, 数理解析研究所講究録 査読無, Vol.1591 (2008), 119-124.
- [12] S. Jimbo, Y. Morita, Ginzburg-Landau equations and solution structure, Sugaku Expositions, 査読有, Vol.21 (2008), 117-131.
- [13] M. Machida, S. Yamada, M. Okumura, Y. Ohasi, H. Matsumoto, Stripe Formation in Repulsive 4-leg Hubbard Ladder: Directly-extended DMRG Studies, Physica C, 査読有, Vol.468 (2008), 1141.
- [14] M. Machida, T. Kano, T. Koyama, M. Kato, T. Ishida, Numerical Simulation for Non-equilibrium Superconducting Dynamics and the Transition Edge: Simulation for MgB2 Neutron Detector, J. Low Temp. Phys.

- 査読有, Vol.151 (2008), 58-63.
- [15] M.Machida, T.Koyama, H.Matsumoto, Synchronization Effects in Intrinsic Josephson Junctions by Non-equilibrium Heating, J. Phy. Conf. 査読有, Vol.129 (2008), 012027
- [16] M.Machida, S.Yamada, T.Kano, M.Okumura, T.Imamura, T.Koyama, Quantum Effects on Capacity-coupled Intrinsic Josephson Junctions, J. Phys. Chem. Solids 査読有, Vol.69 (2008), 3221.
- [17] T.Mizumachi, R.L.Pego, Asymptotic stability of Toda lattice solutions, Nonlinearity 査読有, Vol.21 (2008), 2061-2071.
- [18] T. Mizumachi, Asymptotic stability of small solitons to 1D NLS with potential, J. Math. Kyoto Univ. 査読有, Vol.48 (2008), 471-498.
- [19] T.Mizumachi, S.Cuccagna, On asymptotic stability in energy space of ground states for nonlinear Schrodinger equations, Comm. Math. Phys. 査読有, Vol.284 (2008) 51-71.
- [20] S. Fukushima, S.Nakahashi, Y.Nakato, T.Ogawa, Selection principle for various nodes of spatially non-uniform electrochemical oscillations, J. Chem. Phys. 査読有, Vol.128 (2008), 014714.
- [21] S.Kosugi, Y.Morita, S.Yotsutani, Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: Proof by the complete elliptic integrals, Discrete Contin. Dynam. Systems, 査読有, Vol.19 (2007), 609-629.
- [22] C.-N.Chen, Y.Morita, Bifurcation of vortex and boundary-vortex solutions in a Ginzburg-Landau model, Nonlinearity, 査読有, Vol.20 (2007), 943-964.
- [23] S.Yamada, M.Machida, Y.Ohashi, H.Matsumoto, Strong pairing and microscopic inhomogeneity of lattice fermion systems, Physica C 査読有, Vol.463-465 (2007), 103-106.
- [24] M.Machida, T.Koyama, Theory for collective macroscopic tunneling in high-Tc intrinsic Josephson junction, Physica C 査読有, Vol.463-465 (2007), 84-88.
- [25] M.Machida, T.Koyama, Collective macroscopic tunneling in intrinsic Josephson junction, Physica C 査読有, Vol.460-462 (2007), 289-292.
- [26] T.Mizumachi, Asymptotic stability of small solitons

for 2D Nonlinear Schrodinger equation with potential, J. Math. Kyoto Univ. 査読有, Vol.47 (2007) 599-620.

- [27] T.Mizumachi, Instability of vortex solitons for 2D focusing NLS, Adv. Differential Equations, 査読有, Vol.12 (2007) 241-264.

[学会発表](計2件)

- [1] Y.Morita, Traveling waves of a reaction-diffusion equation in the higher-dimensional space, Equadiff 12, 2009年7月22日, Masaryk University, Brno, Czech Republic
- [2] Y.Morita, A mass-conserved reaction-diffusion system, The 2nd International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, 2009年7月15日, Providence University, Taichung, Taiwan

[図書](計1件)

- [1] 神保秀一, 森田善久著
「ギンツブルク - ランダウ方程式と安定性解析」, 岩波書店, 2009, pp310

[その他]

ホームページ:

<http://www.math.ryukoku.ac.jp/~morita/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森田 善久 (MORITA YOSHIHISA)
龍谷大学・理工学部・教授
研究者番号: 10192783

(2) 研究分担者

神保 秀一 (JIMBO SHUICHI)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80201565
小川 知之 (OGAWA TOSHIYUKI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授
研究者番号: 80211811
町田 昌彦 (MACHIDA MASAHIKO)
独立行政法人日本原子力研究開発機構・システム計算科学センター・研究主幹
研究者番号: 60360434
水町 徹 (MIZUMACHI TETSU)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 60315827

(3) 連携研究者