

平成 23 年 3 月 31 日現在

機関番号： 14501

研究種目： 基盤研究 (B)

研究期間： 2007 2010

課題番号： 19340031

研究課題名 (和文) 普遍指標の拡張と新しいソリトン方程式系

研究課題名 (英文) Extension of universal character and new soliton equations

研究代表者

太田 泰広 (OHTA YASUHIRO)

神戸大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号： 10213745

研究成果の概要 (和文)：普遍指標を拡張し、それらに対して簡約を適用するとともに、ソリトン理論における直接法を用いることによって、様々な新しいソリトン方程式とそれらの解を構成した。数理物理学に対する幾つかの応用についても研究した。

研究成果の概要 (英文)：By generalizing the universal characters, applying reductions and using the direct method of soliton theory, various new soliton equations and their solutions are constructed. Some applications to mathematical physics are also investigated.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2008年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2009年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2010年度	2,500,000	750,000	3,250,000
年度			
総計	10,500,000	3,150,000	13,650,000

研究代表者の専門分野： 数理物理学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 普遍指標、ソリトン、可積分系

1. 研究開始当初の背景

(1) (離散)Painlevé 方程式系に対する研究の成果に基づいて、Drinfeld-Sokolov 階層の簡約と離散化の一般論の構築や、初期値空間のモジュライ理論的構成の拡張など、様々な発展の方向性が考え

られた。それらの中でも特に重要な研究テーマは、偏微分方程式系への理論の拡張と応用であった。(2) (離散)Painlevé 方程式系が KP 階層の簡約で得られるにもかかわらず、それらの解は Schur 関数だけでは捉えきれず、少なくとも普遍指標まで

拡げて考えなければならない。この事実から、KP 階層を含むような一般的な可積分系の階層を構成することができるということが予想された。

(3) ソリトン方程式の研究においては、KP 理論を拡張することによって、より広いクラスの非線形可積分系を構成しようという問題意識が高まってきたおり、物理や工学などの応用面からも、従来の可積分系の理論を拡張して新しいソリトン方程式系を構成することに対する要請が根強かった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、Schur 関数を含む普遍指標を、一般的な多重構造をもつ形へと拡張するとともに、その空間に対して次元簡約を適用することによって、KP 階層を拡張した新しいソリトン方程式の階層を構成し、解空間の代数的構造や解析的性質などを総合的に研究することである。

## 3. 研究の方法

普遍指標の Jacobi-Trudi 型表示に対する多重構造化を行ない、ソリトン理論における直接法を適用することによって、Plücker 関係式から離散双線形方程式の階層を構成する。周期簡約や相似簡約を適用することによって、新しいソリトン方程式系の構成を行なうとともに、次元退化していく非自律型可積分系の退化系列を明らかにする。Bäcklund 変換、Lax 形式、特殊解などの構成およびそれらの数理物理的応用について研究する。

## 4. 研究成果

(1) KP 理論の枠組における  $\tau$  関数についての簡明な表示を用いることにより、両無限戸田格子方程式の  $\tau$  関数に対する Hankel 行列式解と、付随する線形問題の解との間の関係を明らかにした。同様の関係が Painlevé II および IV 方程式の解とそれらの線形問題の解についても成立していることを示した。また、有限格子の場合への制限についても議論した。

(2) 非可換変数に対する Darboux 変換の理論を用いて構成された、非可換広田三輪方程式の解の擬行列式表示について考察し、これらの解が擬 Plücker 座標として特徴づけられることを示した。同時に、非可換広田三輪方程式が擬 Plücker 関係式と見なせることを明らかにした。特に行列型広田三輪方程式に対して、擬行列式表示をもとにして解の具体的な構成を行い、従来の多成分 KP 理論からの構成と比較し、構成の記述および計算の過程が著しく簡単化されることを明らかにした。

(3) 多成分 KP 系列の理論に基づいてベクトル型ソリトンの相互作用について研究した。特に二次元長波短波共鳴相互作用方程式に関して、可積分の場合の  $N$  ソリトン解を構成し、特徴的なソリトン相互作用を明らかにした。また、物理的な状況下における非可積分な場合の方程式に対しても、幾つかの特解の構成を行い解の挙動について議論した。

(4) Camassa-Holm 方程式に対して、双線形形式と解の行列式表示に基づいて、可積分な空間離散化を構成した。連続と空間離散の両方の場合について、 $N$  ソリトン解の行列式表示を与え、それを用いて多ソリトン-多カスポン解を生成した。この空間離散 Camassa-Holm 方程式を用いた数値シミュレーションを行ない、カスポン-カスポン相互作用やソリトン-カスポン相互作用も安定に高精度で再現されることを明らかにした。離散 Camassa-Holm 方程式は、場の方程式と空間の差分点の運動を記述する方程式の結合系として表され、時間発展は主として差分点の運動によって支配される。

(5) 可積分な  $(2+1)$  次元非局所非線形 Schrödinger 方程式の解について研究し、 $N$  ソリトン解の Gram 型行列式表示を求めた。二次元的に局在したソリトンが、衝突相互作用によってその振幅を変化させる現象を見出した。この方程式は、結合型非線形 Schrödinger 方程式の成分を無限大にした極限でえられる。

(6) 双線形化法に基づいて、非自律離散 KdV 方程式の Casorati 行列式解を構成した。三種類の定式化に従って、三種類の異なる双線形方程式を導出した。その一つは、自律離散 KdV 方程式に対して、非自律的な離散時間発展を同時に考えることによってえられている。

(7) 非自律非線形可積分系において、 $1+1$  次元系の場合には  $2+1$  次元系とは異なり、自律系と本質的に異なる双線形形式を考える必要がある。離散 KdV 方程式、離散時間戸田格子、離散 Lotka-Volterra 方程式を例として、 $1+1$  次元への簡約と非自律化が両立する構造を議論し、双線形方程式における自律系と非自律系の相違を明らかにするとともに、Casorati 行列式解を具体的に構成した。

(8) 離散結合型非線形 Schrödinger 方程式において、双線形形式の理論を用いることによって、様々なタイプのソリトン解を構成することに成功した。連続結合型方程式の場合や離散単独方程式の場合

と異なり、離散結合型の場合には、解空間の構造が本質的に異なり、ソリトン解は Pfaffian を用いて表現される。集束-集束型および非集束-非集束型の場合に対して、それぞれ明-明型および暗-暗型の解を具体的に与えた。特に暗-暗型のソリトン解の場合には、従来にはない双線形方程式の構成法を用い、複雑な簡約条件を適用することによって初めて解を得ることができる。これは本質的に結合型で表される様々な可積分発展方程式系に共通に見られる構造であると予想される。

(9) 二次元長波短波共鳴相互作用系の可積分な二成分化を考え、物理系からの方程式の導出およびその解空間の代数構造の研究を行った。単純化された場合にこの方程式系は、二層流体の界面波と二つの表面波束の共鳴相互作用を記述する運動方程式と関係づけられる。V字型波などの様々な解が多成分 Wronski 行列式を用いて具体的に構成された。

(10) Camassa-Holm 方程式の短波モデルと二次元戸田格子方程式の双線形形式との間の関係を明らかにした。短波モデル方程式の  $N$ -カスポン解が Casorati 行列式を用いて表されることを示し、その表示に基づいて離散化を行なうことによって、短波モデル方程式に対する可積分な空間離散化および時間空間離散化を構成した。これらの離散方程式に対する行列式解の構成も行なった。

(11) 短パルス方程式に対して、可積分な半離散方程式および全離散方程式を提出した。これらの離散可積分系の構成において鍵となるのが、短パルス方程式の双線形形式と解の行列式構造である。短パルス方程式の離散類似に対して、 $N$ -ソリトン解の行列式表示を与え、それらを用いて多ループ解や多ブリーザー解の構成を行なった。連続極限において全離散短パルス方程式から半離散短パルス方程式が得られ、さらに連続極限を取ることによって連続の短パルス方程式を得ることができる。半離散短パルス方程式に基づいて可積分な数値計算スキームを構成し、数値シミュレーションへの応用が可能であることを示した。

(12) 結合型微分非線形 Schrödinger 方程式に対する様々なソリトン解を構成し、それらの相互作用について解析を行なった。特に、すべての従属変数に対して暗いソリトンが走る解を考えるとときには、搬送波の周波数が従属変数ごとに異なることが重要であり、それらの相互作用においては分極シフト現象が起きないことを明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 15 件)

- (1) K. Kajiwara, M. Mazzocco and Y. Ohta, A Remark on the Hankel Determinant Formula for Solutions of the Toda Equation, *J. Phys. A: Math. Theor.* 査読有 **40** (2007) 12661–12675.
- (2) C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo and Y. Ohta, Quasideterminant Solutions of a Non-Abelian Hirota-Miwa Equation, *J. Phys. A: Math. Theor.* 査読有 **40** (2007) 12607–12617.
- (3) A. Kuniba, R. Sakamoto and Y. Yamada, Tau Functions in Combinatorial Bethe Ansatz, *Nuclear Phys. B* 査読有 **786** (2007) 207–266.
- (4) Y. Ohta, K. Maruno and B.-F. Feng, An Integrable Semi-Discretization of the Camassa-Holm Equation and Its Determinant Solution, *J. Phys. A: Math. Theor.* 査読有 **41** (2008) 355205.
- (5) K. Maruno and Y. Ohta, Localized Solitons of a (2+1)-Dimensional Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equation, *Phys. Lett. A* 査読有 **372** (2008) 4446–4450.
- (6) K. Kajiwara and Y. Ohta, Bilinearization and Casorati Determinant Solution to the Non-Autonomous Discrete KdV Equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* 査読有 **77** (2008) 054004.
- (7) K. Kajiwara and Y. Ohta, Bilinearization and Casorati Determinant Solutions to Non-autonomous 1+1 Dimensional Discrete Soliton Equations, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* 査読有 **B13** (2009) 53–73.
- (8) Y. Ohta, Discretization of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations, *Stud. Appl. Math.* 査読有 **122** (2009) 427–447.
- (9) K. Maruno, Y. Ohta and M. Oikawa, Note on the Two-Component Analogue of Two-Dimensional Long Wave-Short Wave Resonance Interaction System, *Glasgow Math. J.* 査読有 **51A** (2009) 129–135.

- (10) Y. Komori, M. Noumi and J. Shiraishi, Kernel Functions for Difference Operators of Ruijsenaars Type and Their Applications, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 査読有 **5** (2009) 054.
- (11) Y. Yamada, A Lax Formalism for the Elliptic Difference Painlevé Equation, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 査読有 **5** (2009) 042.
- (12) Y. Yamada, Padé Method to Painlevé Equations, Funkcial. Ekvac. 査読有 **52** (2009) 83–92.
- (13) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable Discretizations for the Short-Wave Model of the Camassa-Holm Equation, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **43** (2010) 265202.
- (14) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable Discretizations of the Short Pulse Equation, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **43** (2010) 085203.
- (15) H. Awata and Y. Yamada, Five-Dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra, J. High Energy Phys. 査読有 **1** (2010) 125.
- [学会発表] (計 9 件)
- (1) 太田泰広, 離散戸田格子方程式と直交多項式系, 研究集会「ソリトンの数理とその応用: 非線形波動から可積分系へ」, 2007 年 12 月 23 日, 山口, 日本.
- (2) K. Maruno, Y. Ohta and M. Oikawa, Vector soliton and multi-component KP hierarchy, AMS Joint Mathematics Meetings, 9 Jan 2008, San Diego, USA.
- (3) Y. Ohta, Discretization of coupled nonlinear Schrödinger equations, International Conference: Nonlinear Waves—Theory and Applications, 9 Jun 2008, Beijing, China.
- (4) Y. Ohta, Bäcklund transformation of Toda lattice and solution of Painlevé equation, 8th International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations, 23 Jun 2008, Montreal, Canada.
- (5) Y. Ohta, Dark soliton solution of Sasa-Satsuma equation, International Workshop on Nonlinear and Modern Mathematical Physics, 20 Jul 2009, Beijing, China.
- (6) Y. Ohta, Determinant identities arising from soliton theory, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 9 Jan 2010, Shaoxing, China.
- (7) Y. Ohta, Discrete sine-Gordon equations: hyperbolic and elliptic types, Symmetry Plus Integrability 2010, 14 Jun 2010, South Padre Island, USA.
- (8) Y. Ohta, Coordinate transformation and discretization for soliton equation, GCOE conference: Algebraic and geometric aspects of discrete integrable systems — Integrable systems and cluster algebras, 15 Dec 2010, Tokyo, Japan.
- (9) Y. Ohta, Dark and bright soliton solutions for coupled derivative nonlinear Schrödinger equation, 2011 Joint Mathematics Meetings, 6 Jan 2011, New Orleans, USA.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

太田 泰広 (OHTA YASUHIRO)  
 神戸大学・大学院理学研究科・准教授  
 研究者番号: 10213745

### (2) 研究分担者

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)  
 神戸大学・自然科学系先端融合研究環・教授  
 研究者番号: 80164672

山田 泰彦 (YAMADA YASUHIKO)  
 神戸大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 00202383