

平成 22 年 5 月 12 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19340033

研究課題名 (和文) 粘性流体の運動を記述する非線形偏微分方程式系の漸近解析

研究課題名 (英文) Asymptotic analysis of systems of nonlinear partial differential equations describing motions of viscous fluids

研究代表者

隠居 良行 (KAGEI YOSHIYUKI)

九州大学・大学院数理研究院・教授

研究者番号：80243913

研究成果の概要 (和文)：粘性流体の運動を記述する非線形偏微分方程式である圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時間無限大における漸近挙動を詳細に考察し、無限層状領域や柱状領域における静止定常解や非自明な平行流型定常解のまわりの解の挙動の様相を明らかにした。これらの領域においては、定常解がある意味で小さければその定常解は漸近安定であり、攪乱は時間無限大において漸近的に移流熱方程式の解のように振る舞うことを証明した。

研究成果の概要 (英文)：We studied the asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation which describes motion of viscous fluids. We analyzed the stability properties of stationary solutions such as the motionless state and parallel flows in detail. It was proved that these stationary solutions are asymptotically stable if they are small enough in some sense. Furthermore, it was shown that the disturbances behave like solutions of convective heat equations in large time.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
総計	5,200,000	1,560,000	6,760,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：圧縮性 Navier-Stokes 方程式, 安定性, 漸近挙動

## 1. 研究開始当初の背景

粘性流体の運動を記述する方程式系は準線形双曲型-放物型連立偏微分方程式の形をとることが多い。これらの方程式系については、波の伝播と粘性による拡散が解の漸近挙動を支配する主要因となっており、解は多様な挙動を呈する。圧縮性流体の運動の特徴は、

その運動に伴って圧縮や膨張が起こり、密度変化が波となって伝播する点にある。粘性流体の場合はこの波の伝播が時間の経過と共に粘性拡散により減衰していく。このような波動現象は拡散波動と呼ばれている。D. Hoff と K. Zumbrun (1995) は多次元全空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する Cauchy 問

題の解析において、拡散波動の持つ波の伝播の性質を定量的にとらえることに成功した。本研究代表者の隠居と連携研究者の小林(2005)は Hoff と Zumbrun の拡散波動の解析に注目し、半空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を斉次 Dirichlet 条件の下で考察した。半空間問題でも全空間問題と同様のことが成り立ち、半空間問題の場合はさらに全空間における拡散波動に加えて、境界との相互作用の影響を含む新たな拡散波動が出現することがわかった。しかしながら、その背後にある数理構造はよくわかっておらず、波の伝播、粘性拡散および領域の境界が解の時間無限大での漸近挙動にどのような影響を及ぼすかということが課題となった。このような現象の解明には、圧縮流体の運動を記述するいろいろな方程式系や非有界な境界をもつさまざまな非有界領域上の問題の解析、および、境界の影響がより強く現れる非斉次境界条件の下での解析が有効であると考えられる。一方、非斉次境界条件の下での問題は空間非一様性をもつ定常解などの非自明な「小さくない解」を生み出す。こうした状況に対する解析は、空間非一様な状態により方程式のもつ双曲型の性質が強く現れてくるために難しいものとなる。空間1次元の場合は衝撃波等の解析に見られるように詳細な解析が進み、多くの解析手法が確立されてきた。空間多次元の場合は小さい解の漸近挙動の解明は進んでいるが、大きな解についてはほとんど結果がなく、「小さくない解」の安定性などの漸近解析は重要な研究課題となっている。

解の時間無限大における漸近挙動の解析に密接に関連する問題として非圧縮極限の問題があり、熱対流現象を記述する Oberbeck-Boussinesq 方程式の圧縮性 Navier-Stokes 方程式からの非圧縮極限による導出の数学的正当化は長い間未解決の問題であったが、E. Feireisl と A. Novotny によって解決された。

## 2. 研究の目的

本研究の主目的は、圧縮性 Navier-Stokes 方程式などの圧縮性流体の運動を記述する基礎方程式系に対して、波の伝播と粘性による拡散に加えて領域の境界が解の挙動にどのような影響を及ぼすかを解明することである。このため、圧縮性流体の運動を記述するいろいろな方程式系や非有界な境界をもつさまざまな非有界領域上の問題に対する解析を試み、それらを通じて、波の伝播、粘性拡散、領域の境界の三者の相互作用がどのように解の挙動に影響を与えるかを解明し、流体方程式系の解の漸近挙動を系統的に取り扱うための数学的手法を確立することをひとつの課題とした。また、本研究では斉次

境界条件のみでなく、境界の影響がより強く現れる非斉次境界条件の下での解の挙動の解析の試みも行う。半空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式は、ある種の非斉次境界条件の下で、Gauss の誤差関数の形状をもつ自己相似解(Rayleigh 流)をもつ。Rayleigh 流はその形状の単純さから境界上の摩擦応力の影響を調べるには最適の流れであり、本研究ではこの Rayleigh 流の安定性解析を課題のひとつとした。この Rayleigh 流の安定性解析は、空間多次元の圧縮性 Navier-Stokes 方程式の「小さくない解」の漸近挙動の解析へと通ずるものでもある。

## 3. 研究の方法

領域の境界の影響を調べるために、無限層状領域および任意の有界な断面をもつ柱状領域における解の漸近挙動について斉次境界条件の下での静止状態の安定性を考察した。さらに半空間問題の Rayleigh 流の安定性解析のために、より単純化した無限層状領域における非斉次境界条件の下での平面 Couette 流の安定性を考察するアプローチをとった。平面 Couette 流の解析は「小さくない解」の安定性解析の格好の例ともなるものである。まず線形化安定性を考察し、それに基づき非線形問題を解析した。線形化安定性については、領域の非有界方向の変数について Fourier 変換した問題を考察し、低周波部分と高周波部分とに分けて解析を行った。低周波部分については、ゼロ周波数部分の作用素からの摂動として捉え、高周波部分については、静止状態の場合は半空間問題の摂動と見なし、平行流型定常解の場合は松村-西田のエネルギー法の Fourier 変換版により解析を行った。

また Rayleigh 流は自己相似構造をもつことからこの性質に着目した解析も試みた。

研究課題の解析のために非線形偏微分方程式に対する関数解析的手法、実解析的手法、無限次元力学系理論などのさまざまな手法が必要であり、関連する論文の精読や偏微分方程式関係の図書の購読により解析手法の研究、現状の分析、研究の動向に関する情報収集を行った。

毎週1回「九州関数方程式セミナー」に偏微分方程式の研究者を招へいし、セミナー講演を通じて研究討論、意見交換を行った。

偏微分方程式関連の研究集会を開催、あるいは集會に参加するなどして、国内外の非線形偏微分方程式の研究者との研究交流を行い、最新の手法、視点、研究の動向に関する情報収集を行った。平成19年度～21年度に開催した研究集会は以下のとおりである。

平成19年度～21年度の毎年度：

・「流体と気体の数学解析」開催地：京都

・「九州における偏微分方程式研究集会」開催地：福岡

・「非線型の諸問題」開催地：鹿児島（平成19年度）、佐賀（平成20年度）長崎（平成21年度）

・「若手のための偏微分方程式と数学解析」開催地：福岡

平成20年度

・「New Aspects and Development of Mathematical Analysis in Nonlinear Phenomena」開催地：福岡

平成20, 21年度

・「Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics」開催地：北京（平成20年度）、福岡（平成21年度）

平成21年度

・「Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future--In memory of Professor Tetsuro Miyakawa」開催地：神戸

#### 4. 研究成果

(1) 無限層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して静止状態のまわりの解の漸近挙動を考察し、初期値があるソボレフ空間において十分小さければ、解は時間大域的に存在し、静止状態に対する攪乱は時間無限大において熱方程式の解のごとく振る舞うことを示した。証明では、領域の非有界方向の変数について Fourier 変換した系を考え、低周波部分と高周波部分の詳細な解析によって必要なレゾルベント評価を導出した。低周波部分の解析手法は、この種の問題に対して有用なものであり、非自明な平行流型定常解の安定性解析においても用いられる。さらに、無限層状領域における静止状態の安定性解析を任意形状の断面をもつ柱状領域における問題の解析へと発展させた。線形化作用素のスペクトル解析において、低周波部分は層状領域の場合と同様に行い、高周波部分は半空間問題からの摂動として捉えることにより必要な評価式を得た。ここでのスペクトル解析においては、半空間上の温度変化を考慮に入れた圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解析に対しても有用である評価式を得た。

(2) 無限層状領域における圧縮性流体中の平面 Couette 流の安定性を考察し、レイノルズ数およびマッハ数が十分小さければ、平面 Couette 流は十分小さな攪乱に対して漸近安定であることをエネルギー法により示した。さらに、線形化作用素のスペクトル解析を行い、攪乱の漸近挙動における主要部は平面 Couette 流の流れにもとづく移流熱方程式の解で与えられることを示した。線形化作用素のスペクトル解析は静止状態の場合と同様に領域の非有界方向の変数について Fourier

変換した系を考察したが、静止状態の場合とは異なり、平面 Couette 流の場合は方程式の双曲型の性質が強く現れて線形化作用素が sectorial operator とならず、高周波部分は、松村-西田のエネルギー法の Fourier 変換版を用いて解の減衰評価を導出した。さらに平面 Couette 流の安定性についての解析を密度が非定数であるようなポアズイユ流型定常解の安定性の解析へと拡張し、レイノルズ数およびマッハ数が十分小さい場合に、ポアズイユ流型定常解の周りの線形化作用素の生成する半群の時間無限大における漸近挙動の主要部はポアズイユ流型定常解の流れにもとづく移流項付き熱方程式の解で与えられることを示した。線形化作用素のスペクトルについては、高周波部分は平面 Couette 流の場合と同様に扱い、低周波部分については、より精密な解の分解を新たに導入することによって必要な評価を得ることができた。この分解は非線形問題の解析にも有用であることが予想されるが、非線形問題では非線形拡散波動が出現する可能性が高く、このことの解明、および、ここで得られた解析手法を Rayleigh 流の安定性解析へと発展させることが今後の課題となった。

(3) Rayleigh 流は自己相似構造をもつため、平行移動不変性とスケール変換不変性をもつ抽象的發展方程式の自己相似解の周りの解の漸近挙動を考察し、その解析のための抽象的枠組みを構築した。ここで考えた發展方程式は、移流拡散方程式、2次元渦度方程式、2次元 Keller-Siegel 方程式などの保存系の半線形放物型方程式を代表的な例として含み、さらに、Vlaso-Poisson-Fokker-Planck 方程式などの退化放物型方程式をも含むような定式化がなされている。この枠組みに入る非線形方程式系の解の時間無限大での挙動が自己相似解を時空方向に適当に平行移動したものによってよりよく近似されることを示した。また2次元 Keller-Siegel 方程式に対してこの抽象論を適用するために、自己相似解のまわりの線形化作用素の詳細なスペクトル解析を行った。これらの成果は論文にまとめ投稿中である。（プレプリント：Yoshiyuki Kagei and Yasunori Maekawa, MI Preprint Series 2009-30 および 2009-29, Kyushu University, 2009.）

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計24件）

- ① Yuya Ishihara and Yoshiyuki Kagei, Large time behavior of the semigroup on  $\mathcal{L}^p$  spaces associated with the linearized compressible Navier-Stokes

- equation in a cylindrical domain, J. Differential Equations, vol. 248 (2010), pp. 252–286, 査読有.
- ② Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier–Stokes equation around the plane Couette flow, accepted for publication in J. Math. Fluid Mech., (2009), 査読有.
- ③ S. Kawashima and W.-A. Yong, Decay estimates for hyperbolic balance laws, ZAA (J. Anal. Appl.), vol.28 (2009), 1–33, 査読有.
- ④ S. Kawashima and P. Zhu, Asymptotic stability of rarefaction wave for the Navier–Stokes equations for a compressible fluid in the half space, Arch. Rat. Mech. Anal., vol.194 (2009), 105–132, 査読有.
- ⑤ S. Kawashima and M. Kurata, Hardy type inequality and application to the stability of degenerate stationary waves, J. Func. Anal., vol.257 (2009), 1–19, 査読有.
- ⑥ T. Iguchi, A shallow water approximation for water waves, J. Math. Kyoto Univ., vol. 49 (2009), 13–55, 査読有.
- ⑦ K. Ohi and T. Iguchi, A two-phase problem for capillary-gravity waves and the Benjamin-Ono equation, Discrete Contin. Dyn. Syst., vol.23 (2009), 1205–1240, 査読有.
- ⑧ T. Nakamura and S. Nishibata, Convergence rate toward planar stationary waves for compressible viscous fluid in multi-dimensional half space, SIAM J. Math. Anal., Vol.41 (2009), No.5, pp.1757–1791, 査読有.
- ⑨ Yasunori Maekawa, Existence of asymmetric Burgers vortices and their asymptotic behavior at large circulations, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol.19 (2009), 669–705, 査読有.
- ⑩ Yasunori Maekawa, On the existence of Burgers vortices for high Reynolds numbers, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.349 (2009), 181–200, 査読有.
- ⑪ Yoshiyuki Kagei and Takumi Nukumizu, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier–Stokes equation in a cylindrical domain, Osaka J. Math., vol.45 (2008), pp. 987–1026, 査読有.
- ⑫ Yoshiyuki Kagei, Large time behavior of solutions to the compressible Navier–Stokes equation in an infinite layer, Hiroshima Math. J., vol. 38 (2008), pp. 95–124, 査読有.
- ⑬ Y. Ueda, T. Nakamura and S. Kawashima, Stability of planar stationary waves for damped wave equations with nonlinear convection in multi-dimensional half space, Kinetic and Related Models, vol.1 (2008), 49–64, 査読有.
- ⑭ S. Kawashima and P. Zhu, Asymptotic stability of nonlinear wave for the compressible Navier–Stokes equations in the half space, J. Diff. Equations, vol. 244 (2008), 3151–3179, 査読有.
- ⑮ Masaki Kurokiba and Takayoshi Ogawa, Well-posedness for the drift-diffusion system in  $L^p$  arising from the semiconductor device simulation, J. Math. Anal. Appl., vol.342 (2008), 1052–1067, 査読有.
- ⑯ T. Kobayashi and T. Suzuki, Weak solutions to the Navier–Stokes equation, Advances in Differential Equations, vol.1 (2008), 141–168, 査読有.
- ⑰ T. Nakamura and S. Nishibata, Large-time behavior of spherically symmetric flow of heat-conductive gas in a field of potential forces, Indiana Univ. Math. J., vol.57 (2008), no.2, pp.1019–1054, 査読有.
- ⑱ Yasunori Maekawa, A lower bound for fundamental solutions of the heat convection equations, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 189 (2008), no.1, 45–58, 査読有.
- ⑲ Yasunori Maekawa, On spatial decay estimates for derivatives of vorticities with application to large time behavior of the two dimensional Navier–Stokes flow, Journal of Mathematical Fluid Mechanics., vol.10 (2008), 89–105, 査読有.
- ⑳ Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of the semigroup associated with the linearized compressible Navier–Stokes equation in an infinite layer, Publ. Res. Inst. Math. Sci., vol.43 (2007), pp. 763–794, 査読有.
- (21) Yoshiyuki Kagei, Resolvent estimates for the linearized compressible Navier–Stokes equation in an infinite layer, Funkcial. Ekvac., vol.50 (2007), pp. 287–337, 査読有.
- (22) T. Iguchi, A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara equation, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), vol.2 (2007), 179–220, 査読有.
- (23) T. Iguchi, A long wave approximation

for capillary-gravity waves and an effect of the bottom, *Comm. Partial Differential Equations*, vol.32 (2007), 37-85, 査読有.

- (24) T.Nakamura, S.Nishibata and T.Yuge, Convergence rate of solutions toward stationary solutions to the compressible Navier--Stokes equation in a half line, *J. Differential Equations*, vol.241 (2007), no.1, pp.94-111, 査読有.

[学会発表] (計 28 件)

- ① Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, *International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics*, 2010, March 8-16, Waseda University.
- ② Yasunori Maekawa, Three dimensional stability of the axisymmetric Burgers vortex, *International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics*, 2010.3.8-3.16, Waseda University.
- ③ 隠居良行, Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around a laminar flow, 第7回浜松偏微分方程式研究集会, 2009年12月21日--22日, 静岡大学浜松キャンパス工学部.
- ④ Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around a laminar flow, *Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future --In memory of Professor Tetsuro Miyakawa*, 2009, December 7-9, Kobe University.
- ⑤ Yasunori Maekawa, Stability of the axisymmetric Burgers vortex, *Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future - In memory of Professor Tetsuro Miyakawa*, 2009.12.7-12.9, Kobe University.
- ⑥ S. Kawashima, Decay structure for systems of viscoelasticity, *Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future -- In memory of Professor Tetsuro Miyakawa*, 神戸大, 2009年12月7日--9日.
- ⑦ 井口達雄, A mathematical analysis of tsunami generation in shallow water due to seabed deformation, *Second Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics*, 九州大学西新プラザ, 2009年11月18日.
- ⑧ T.Nakamura, Asymptotic stability of stationary waves for viscous heat-conductive gases in half line, *Second Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics*, 九州大学, 2009年11月16日.
- ⑨ 川島秀一, Decay property for hyperbolic systems of viscoelasticity, 偏微分方程式の諸問題, 東海大学理学部, 2009年10月31日--11月1日.
- ⑩ T.Nakamura, Stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space, *RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」*, 京都大学, 2009年7月9日.
- ⑪ 前川泰則, Stability of the axisymmetric Burgers vortex, *RIMS 研究集会 流体と気体の数学解析*, 2009.7.8-7.10, 京都大学数理解析研究所.
- ⑫ T.Nakamura, Stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space, *International Conference on Kinetic and Related Models*, Wuhan University, Wuhan, P.R.China, 2009年4月2日.
- ⑬ 隠居良行, 前川泰則, ある放物型方程式系の自己相似解のまわりの解の漸近挙動, 日本数学会年会, 2009年3月28日, 東京大学.
- ⑭ 前川泰則, Stability of the Burgers vortex, *微分方程式の総合的研究*, 2008.12.20-12.21, 京都大学.
- ⑮ Yoshiyuki Kagei, On asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around the plane Couette flow, *First China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics*, 2008, November 10-13, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China.
- ⑯ T.Nakamura, Existence and stability of stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space, *First China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics*, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, 2008年11月11日.
- ⑰ Yoshiyuki Kagei, On the stability of the plane Couette flow of the compressible Navier-Stokes equation, *Mathematical Fluid Dynamics*, 2008年9月8日--10日, Darmstadt, Germany.
- ⑱ Yasunori Maekawa, Asymmetric Burgers vortices at large circulations, *Workshop Mathematical Fluid Dynamics*, 2008.9.8-9.10, Technische Universität Darmstadt.

- ⑲ Takayuki Kobayashi, Fluid mechanical approximation to the degenerated drift-diffusion system from compressible Navier-Stokes-Poisson system, Mathematical Fluid Dynamics, 2008年9月10日 Darmstadt Germany.
- ⑳ Takayuki Kobayashi, Weighted estimates for the Stokes semigroup in an exterior domain, Parabolic and Navier Stokes 2008, 2008年9月2日 Banach Center, Poland.
- (21) S. Kawashima, Hardy type inequality and application to the stability of degenerate stationary waves, Workshop Mathematical Fluid Dynamics, Tech. Univ. Darmstadt, Darmstadt, Germany, September 2008.
- (22) 川島秀一, A Hardy type inequality and application to the stability of degenerate stationary waves, 研究集会「流体と気体の数学解析」, 京都大学数理解析研究所, 2008年7月.
- (23) Takayuki Kobayashi, Fluid mechanical approximation to the degenerated drift-diffusion system from compressible Navier-Stokes-Poisson system, New Aspects and Development of Mathematical Analysis in Nonlinear Phenomena, 2008年5月29日 九州大学西新プラザ.
- (24) 井口達雄, Shallow water approximations for water waves, 7th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Department of Mathematics at the University of Texas at Arlington, USA, 2008年5月21日.
- (25) 井口達雄, A shallow water approximation for water waves, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, Hilton Phoenix East/Mesa, Mesa, Arizona, USA, 2007年12月10日.
- (26) Takayoshi Ogawa, Drift-diffusion system in 2 dimensional Hardy space, 5th Linear and nonlinear wave, 11月1-3日, 2007年, ピアザ淡海, 大津市.
- (27) Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equations in an infinite layer : Stability of the motionless state and the plane Couette flow, Seminar at MIP, 2007年9月, University of Paul Sabatier, Toulouse, France.
- (28) S. Kawashima, Stability of degenerate stationary waves for viscous conservation laws, The Second Workshop on Nonlinear Partial Differential

Equations: Analysis, Computation and Application, Seoul National University, Seoul, Republic of Korea, May-June 2007.

[その他]  
ホームページ等  
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~kagei/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

隠居 良行 (KAGEI YOSHIYUKI)  
九州大学・大学院数理研究院・教授  
研究者番号：80243913

### (2) 研究分担者

川島 秀一 (KAWASHIMA SHUICHI)  
九州大学・大学院数理研究院・教授  
研究者番号：70144631

### (3) 連携研究者

小川 卓克 (OGAWA TAKAYOSHI)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：20224107  
小林 孝行 (KOBAYASHI TAKAYUKI)  
佐賀大学・理工学部・教授  
研究者番号：50272133  
井口 達雄 (IGUCHI TATSUO)  
慶応義塾大学・理工学部・准教授  
研究者番号：20294879  
中村 徹 (NAKAMURA TOHRU)  
九州大学・大学院数理学研究院・助教  
研究者番号：90432898  
前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)  
神戸大学・理学研究科・講師  
研究者番号：70507954