

機関番号：17102

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340034

研究課題名 (和文) 超幾何関数の研究

研究課題名 (英文) Study on hypergeometric functions

研究代表者

吉田 正章 (YOSHIDA MASAOKI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：30030787

研究成果の概要 (和文) :

絵有方程式の又黒写像の離散的類似を得ることに成功した。この結果、離散正則関数及び離散曲面の特異点研究に或方向を与えた。

(3, 6)型超幾何微分方程式の測多価群が四型領域の離散部分群になる場合と、有限群になる場合に数論的關係があることを示した。

空間内の平面配置特に6枚の場合に切り取られる図形を記述した。一般次元の舌寝超平面配置で切り取られる図形を組み合わせて的に調べた。

FA型超幾何微分方程式の測多価群の生成元を求めた。

研究成果の概要 (英文) :

We succeeded to find a good discretization of the hyperbolic Schwarz map for the Airy equation. This is the starting point of the study of singularities of discrete surfaces. For the hypergeometric differential equation of type (3, 6), we found a relation between the two monodromy groups - arithmetic group acting of the domain of type IV, and the maximal non-real finite complex reflection group.

We described chambers cut out by six planes in general position in the 3-space.

Veronese arrangements of hyperplanes in real projective spaces re studied.

A set of generators of the monodromy group of the Appell-Lauricella's hypergeometric equation of type FA is obtained.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
総計	5,800,000	1,740,000	7,540,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：黒写像、又黒写像、平前曲面、超幾何関数、絵有関数、離散曲面、平面配置

1. 研究開始当初の背景  
振表 (裏) 路地群については多数の研究があ

ったにも関わらず、表・裏路地群に於ける最重要な対象である交叉理論は存在してなか

った。

2次元実又曲空間は偶々1次元複素又曲空間と一致するために(関数論が使えて)その上の保形関数・形式について、古来数え切れないほどの研究の積み重ねがある。複素高次元対称領域についてもかなり研究が進んでいる。それに反して、3次元実又曲空間上の保形関数・形式については何一つ結果がなかった。

黒写像は発見されて100年、様々な一般化は20世紀を通じて微分方程式・代数幾何・数論・表現論を使って大発展してきたのであるが、基本に戻って、そもそも黒写像は片手落ちであることに気がついていなかった。

裏黒写像は発見されていなかった。

合流型超幾何関数に対しては黒写像は考えにくいから研究されたことがなかった。

Stokes現象は解析学であり、現象を幾何的に捉えることは今までなかった。

黒写像が射影幾何であることに100年以上誰も疑問を持たなかった。射影化する前の裏黒写像でAffine微分幾何的に考える発想がなかった。

離散微分幾何の具体例は初等関数を使ったものばかりであった。

離散曲面に於いては特異点の定義さえなかった。

実超平面配置によって生じる多面体配置は(一見簡単な対象であるのに)研究されていなかった。

## 2. 研究の目的

捩表(裏)路地群の交叉理論が如何に本質的で有用であるかを色々な例で示すこと。

黒写像は片手落ちであり、又黒写像こそ研究すべき対象であることを、示すこと。又黒写像で、特殊微分方程式と(今まで関係するとは思われなかった)微分幾何・実特異点との新しい関係を付けること。

3次元実又曲空間上の保形関数・形式の研究は大事で興味ある例もあることを示すこと。

代数的・表現論の研究だけでなく結び目理論とも関係することを宣伝すること。

裏黒写像の研究はAffine微分幾何の重要課題であることを示すこと。

実超平面配置の研究に指針を与えること。配置の数を数えたり、分類したりするだけが研究のやり方でなく、興味ある配置を見つけてそれを詳しく調べる方向もあることを示すこと。

離散曲面の研究に特殊関数的なものを持ち込むこと。

## 3. 研究の方法

数学の「分野」にとらわれない、自己規制をしない。

特殊関数論・複素解析と実微分幾何は普通は関係しないが、そこに新しい関係を見出し、自由に往復すること。

超平面配置は普通は複素数体上で交叉の様子だけに注目するが、我々は、実代数幾何と組合せと配置を関係させることによって新しい境地を開く。

## 4. 研究成果

多価関数の積分は捩表路地群と裏路地群の伴侶的双対と解釈される。捩路地群の構造が問題である。私はそれらを交叉理論を作ることで研究してきた。特に塩山の超系面配置の時に、共鳴的などきも含めて解析した。

3次元又曲空間に働く鞍印群に関する保形関数・保形形式の研究は殆どなかった。我々は白頭絡み群と言われる鞍印群について保形関数を複素領域での手多関数を利用して構成し、群による商空間の埋め込みを実現した。組紐理論と保形関数の新しい関係である。

不変2-形式を持つ等質2次元多様体を調べた。

不利家曲面に働く(離散的)丸子夫変換を補完する変換を調べた。

超幾何方程式の黒写像は古典的である;その的は複素射影直線である。射影化する前の段階である裏黒写像を提案し、測多価群が有限

の場合に（像は代数曲線になる）詳しく調べた。

20世紀初頭に研究が始まった超幾何方程式の黒写像は的を3次元又曲空間に持ち上げることに抛り、像が平前曲面となり、曲面論（特に特異点）との関連が新たに発見された。新しい写像は又黒写像と命名された。微分方程式の特異点以外に（又黒写像の像に）1次元的に特異点（通常点では尖端、有限個の点で燕尾やそれ以上のもの）が現われることが研究をより豊かなものになっている。

その副産物として、裏黒写像が現われるが、それが複素関数論的に興味ある対象であることが判明した。

又黒写像の像である平前曲面上の特異点が合流する様子を調べた。これはArnoldの分類に部分的に含まれるが、含まれないものも登場する。

的が又曲3-空間である超幾何的又黒写像（像曲面は又曲的平前曲面）とその平行曲面族及び焦曲面の特異点には或る対応があることを発見し、具体例を詳しく研究した。

2階の線形方程式の（一般の）不確定特異点の周りでの又黒写像の振る舞いを調べた。酢と楠現象の可視化である。

超幾何の最終的合流である絵有方程式（及びその一般化）の時に、又曲黒写像を詳しく調べた。

絵有方程式の又曲黒写像の離散的類似（3位の回転対象性、有限なところに在る特異点の振る舞い、無限遠点付近での漸近的振る舞いを継承する）を得ることに成功した。この結果、離散正則関数及び離散曲面の特異点研究に或方向を与えた。

(3,6)型超幾何微分方程式の測多価群が四型領域の離散部分群になる場合と、有限群になる場合に数論的關係があることを示した。

空間内の平面配置、特に6枚の場合、に平面達によって切り取られる図形を記述した。

一般次元の舌寝超平面配置で切り取られる図形を組み合わせた的に調べた。2次元と3次元の特徴の違いの多くが実は偶数次元と奇数次元に一般化できることを示した。

FA型超幾何微分方程式の測多価群の生成元を求めた。ここでは振表路地群の交叉行列が鍵的道具として使われる。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計15件）

- ① M. Yoshida, K. Matsumoto, T. Sasaki, Monodromy of the hypergeometric differential equation of type  $(3,6)$  III. Kumamoto J. Math. 23(2010), 37--47. 査読有
- ② M. Yoshida, T. Koike, T. Sasaki, Hyperbolic Schwarz map around irregular singular points, Funkcial. Ekvac. 53(2010), 99--132. 査読有
- ③ M. Yoshida, T. Sasaki, Singularities of parallel families of flat fronts and their caustics, and a detailed study of an example arising from the hyperbolic schwarz map of a hypergeometric equation. Results in Math. 56(2009), 369--385. 査読有
- ④ M. Yoshida, T. Sasaki, Surface singularities appeared in the hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric equation. Prog in Math 283(2009), 247--272. 査読有
- ⑤ M. Yoshida, K. Saji, T. Sasaki, Hyperbolic Schwarz map for the confluent hypergeometric functions. J Math Soc Japan 61(2009), 559--578. 査読有
- ⑥ M. Yoshida, T. Sasaki, Hyperbolic Schwarz map for the Airy function. J Math. Sci. Univ Tokyo 15(2008), 195--218. 査読有
- ⑦ M. Yoshida, M. Noro, T. Sasaki, K. Yamada, Confluence of swallowtail singularities of the Hyperbolic Schwarz map defined by the hypergeometric differential equation. Experiment. Math. 17(2008), 191--204. 査読有
- ⑧ M. Yoshida, T. Sasaki, K. Yamada, Derived Schwarz map of the hypergeometric equation and a parallel family of flat fronts.

Internat J of Math 19(2008), 847--863.  
査読有

- ⑨ M. Yoshida, T. Sasaki, K. Yamada, Hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric function. Experiment. Math. 17(2008), 269--282. 査読有
- ⑩ M. Yoshida, T. Nishizaka, R. Kobayashi, S. Shinzato, Affine Schwarz map for the hypergeometric differential equation. Funkcial. Ekvac. 51(2008), 281--305. 査読有
- ⑪ M. Yoshida, T. Sasaki, Interpolation of Markoff transformations on the Fricke surfaces. Tohoku J Math. 60(2008), 23--36. 査読有
- ⑫ M. Yoshida T. Sasaki, Homogeneous two-manifolds with an invariant two-form, J Diff Geom 88(2008), 149--161. 査読有
- ⑬ M. Yoshida, Automorphic functions for a Kleinian group. Geometry & Topology Monographs 13(2008), 483--497. 査読有
- ⑭ M. Yoshida, K. Mimachi, Regularizable cycles associated with a Selberg-type integral under some resonance condition. Internat J Math 18(2007), 1--15. 査読有
- ⑮ M. Yoshida, From the power function to the hypergeometric function. Prog in Math 260(2007), 407--429. 査読有

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉田 正章 (YOSHIDA MASAOKI)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号 : 30030787