

研究種目： 基盤研究 (B)
研究期間： 2007 ~ 2010
課題番号： 19340035
研究課題名 (和文) 作用素論と作用素平均の研究

研究課題名 (英文) Study on operator theory and operator means

研究代表者

幸崎 秀樹 (KOSAKI HIDEKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号： 20186612

研究代表者の専門分野： 作用素論

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析

キーワード： 作用素平均, 正定値関数, ノルム不等式, ユニタリ不変ノルム

1. 研究計画の概要

研究代表者は、作用素平均等の作用素自身に関する研究及び作用素を含む様々な量 (ノルム, トレース, エントロピー等の数理論理で現れる量) に関する不等式の研究を行ってきた。研究代表者が従来から興味を持ち、また近年同時並行的に研究を進めている以下二つの研究テーマに関する研究を更に深化・整備するのが本研究の目的であり、研究代表者独自の研究及び共同研究を組み合わせる形式で実行する予定である。

(i) 作用素平均の研究

(ii) 非有界作用素に対する並列和の理論とその応用

2. 研究の進捗状況

以下の研究に進展があった。

- (1) 海外研究連携者 R. Bhatia 氏と共同研究の成果として、平均の研究から自然に生じる行列の多くが正定値行列であるばかりか、実は更に強く無限分割可能な行列 (すなわち Hadamard 積の意味での任意の正冪も正定値行列) である事を示した。
- (2) 大量の関数の Fourier 変換の計算を実行した。それに基づき、Bochner の定理を利用して、作用素平均のノルム比較の為に必要な多くの関数 (特にパラメータの入った双曲線関数の比の形のもの) の正定値性の判定を実行した。特に、

Heron 型の作用素平均 (すなわち相加平均と幾何平均の重み付き和の形のもの) のユニタリ不変ノルムの比較に関しては、従来知られていなかった多くの精密なノルム不等式を得ることが可能となった。(一部発表済み、残りに関しては計算結果を整理して論文として発表予定)

- (3) 二項平均のパラメータに関する単調性は特別な場合には容易に証明可能である。「特別な場合」とは具体的な二項展開が実行可能な場合である。しかしながら、一般の場合の単調性に関しては、関連する関数の Fourier 変換の計算が不可能であり、ずっと手付かずの状態であった。この研究の初期段階よりの懸案事項を肯定的に解決する事ができた。(論文は現在準備中)
- (4) 研究代表者がずっと以前に行った (作用素環の枠組みでの) トレースに対する Jensen 型不等式の更なる精密化・一般化を行った。詳しくは、トレース Jensen 不等式の等号成立条件及び関連する作用素の majorization の意味での比較に関する結果を得た。

3. 現在までの達成度

②「おおむね順調に進展している
特に「研究計画の概要」の (i) の研究に関しては、「研究の進捗状況」で説明した通り研究が大きく前進した。

4. 今後の研究の推進方策

「研究計画の概要」の (i) に関しては、蓄積した結果を整備して、論文として発表する準備を行う。「研究の進捗状況」(3) で説明した一般の単調性を示す為に使った手法の更なる応用を模索する。

一方、(ii) の研究は (i) に比べると遅れているので、最終年にはこの研究にも力を注ぐ。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① T. Harada and H. Kosaki, Trace Jensen inequality and related weak majorization in semi-finite von Neumann algebra, to appear in J. Operator Theory. (査読有)
- ② T. Harada and H. Kosaki, On equality condition for trace Jensen inequality in semifinite von Neumann algebras, Internat. J. Math. 19 (2008) 481-501. (査読有)
- ③ R. Bhatia and H. Kosaki, On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, Linear Algebra and Appl. 424 (2007) 84-108. (査読有)

[学会発表] (計 3 件)

- ① H. Kosaki, Norm comparison for operator means: general theory and new results, Summer School and Advanced Workshop on Trend and Developments in Linear Algebra, ICTP (Trieste), 2009 年 7 月 6 日
- ② H. Kosaki, Trace Jensen type inequality in von Neumann algebras and related topics, Operator Algebras and Quantum Field Theory, Erwin Schrodinger International Institute of Mathematics and Physics (Vienna), 2008 年 11 月 5 日.
- ③ H. Kosaki, On Jensen-type majorizations in semifinite von Neumann algebras, Noncommutative L_p -spaces, Operator Spaces and Applications, CIRM (Luminy), 2007 年 7 月 25 日