

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340035

研究課題名（和文） 作用素論と作用素平均の研究

研究課題名（英文） Study on operator theory and operator means

研究代表者

幸崎 秀樹 (KOSAKI HIDEKI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：20186612

研究成果の概要（和文）：

ある種のスカラー平均より作用素平均が自然な形に構成されるが、そのような作用素平均のユニタリ不変ノルムの比較の為には、対応するスカラー平均の比として現れる関数の正定値性の判定が必要となる。このような比の正定値性の判定が具体的な広いクラスの平均に対して実行され、Heinz型ノルム不等式の各種拡張、作用素二項平均のノルムのパラメータに関する単調性を始めとする、作用素平均のノルム比較に関する数多くの極めて精密な結果が得られた。またこのような多くのスカラー平均の比は、ただ単に正定値関数であるばかりでなく、更に強く infinitely divisible な関数である事が分かった。また、von Neumann 環の枠組みでのトレース Jensen 不等式関連の研究に関しても、マジョリゼーション型不等式の証明、トレース不等式の等号成立条件の決定等の各種進展が見られた。

研究成果の概要（英文）：

Operator means can be constructed from certain scalar means in a natural fashion, and comparison of unitarily invariant norms of such operator means requires positive definiteness of ratios of corresponding scalar means. Positive definiteness for many such ratios was determined, and consequently many very precise norm inequalities (such as an abundance of generalizations of the Heinz inequality and monotonicity in a parameter of norms of operator binomial means) were obtained. Moreover, many such positive definite functions arising in this way were shown to be infinitely divisible. Also, Jensen-type majorization results and the equality condition for the trace Jensen inequality were proved in the setting of von Neumann algebras.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2008年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2009年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2010年度	2,500,000	750,000	3,250,000
総計	10,000,000	3,000,000	13,000,000

研究分野：作用素論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：作用素平均, 正定値関数, ノルム不等式, ユニタリ不変ノルム

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、従来から作用素平均を始めとする作用素自身に関する研究ならびに作用素を含む様々な量（ノルム、トレース、またエントロピー等の数理物理で現れる量）に関する不等式の研究にたずさわってきた。特に、数年前には連携研究者日合氏（東北大）との共同研究の成果として、作用素平均の一般論を構築し、Springer のレクチャーノートとして発表した。この理論ではスカラーに対するある種平均 $M(s, t)$ と作用素平均 $M(H, K)$ (H, K, X はヒルベルト空間の作用素であり $H, K \geq 0$) が 1 対 1 に対応している。更に重要な点は、二つのこのような作用素平均間のユニタリ不変ノルム不等式 $|||M(H, K)X||| \leq |||N(H, K)X|||$ が成立する為の必要十分条件は、対応するスカラー平均の比として決まる関数 $M(e^t, 1) / N(e^t, 1)$ が正定値性関数であるという点である。また、これは関連する平均行列 $[M(\lambda_i, \lambda_j)]_{ij}$ の「Hadamard 商」の正値性（但し、 $\lambda_i \geq 0$ ）とも等価である。

2. 研究の目的

研究目的は以下の二点であった。

(1) 本科研費の期間中には、主に「研究開始当初の背景」で述べた作用素平均の理論を更に深化させ、使い勝手の良いものにする。その為には、大量の関数の正定値性の判定が必要であり、Fourier 変換の計算等を実行してその判定を行う。

(2) 作用素平均の研究以外にも、研究代表者が従来からたずさわってきた作用素に関する諸問題について研究する。特に非有界作用素に関する並列和の理論の構築および von Neumann 環の枠組みでの凸関数の functional calculus に関する Jensen 型トレース不等式の研究に力を注ぐ。

3. 研究の方法

(1) 各種作用素平均のノルム比較を系統的に行う際、様々な関数の正定値性のチェックが必要となる。最も標準的なチェック法は Bochner の定理に頼るものであり、大量の Fourier 変換の計算と Fourier 変換の（各点の意味での）正値性のチェックを実行

する。Fourier 変換の計算には、各種実解析的また複素解析的手法を駆使する。また複素関数論的手法に基づく関数の無限乗積表示も正定値のチェックのためにしばしば有用であるので利用する。

(2) 今まで実行した大量の計算の結果、この研究で現れる多くの関数が正定値であるばかりか、更に infinitely divisible（すなわち任意の正冪も正定値関数）であることも分かってきた。なぜこのような不思議な現象が起きるのか、またこれがどの程度一般的な現象であるのか調べ、作用素平均およびそのノルム比較に関する研究に関する新たな知見を得る。

(3) binomial means B_α 等の幾つかの具体的 one-parameter family of means に対して（正定値性の意味での）パラメータに関する単調性の証明が懸案となっている。問題の難しさは Fourier 変換の計算が困難であり、Bochner の定理による正定値性の判定が不可能なことにある。確率論において infinitely divisible な分布を調べる為の各種手法が知られているので、それらを利用して infinite divisibility の意味での単調性を調べることにより、懸案の問題の解決を模索する。

(4) 非有界作用素に対する並列和に関しては、グラフの解析の手法、作用素（あるいは quadratic form）に対する摂動理論、摂動された作用素の本質的自己共役性の判定条件に関する議論を参考にして、非有界作用素に対する並列和に関する基礎理論構築を目指した研究を行う。

(5) 研究代表者は、以前 von Neumann 環の枠組みで、正作用素（正確には正 τ -可測作用素）に対する Jensen 型トレース不等式の研究を行った。更に一般的に、自己共役 τ -可測作用素に対する Jensen 型トレース不等式に関しても調べたい。研究代表者は generalized singular numbers の理論を始めとする（トレースに関する）非可換積分論の研究にたずさわった経験をもつが、この際の各種手法が役立つものと思われる。

4. 研究成果

(1) 海外研究協力者 R. Bhatia 氏 (Indian Statistical Institute) と共同研究を行い、多くの平均行列のクラスに対して、正值性ばかりか実はずっと強い性質である infinite divisibility (Hadamard 積の意味での任意の正冪が正定値行列) が成立している事を示した。これにより、作用素平均のノルム比較の研究が前進した。正值性より強い infinite divisibility が作用素平均の言葉では何を意味するのかは今の所不明であるが、これは新たに派生した興味深い研究課題であり、今後の解明が望まれる。

(2) power difference means, Heron 型 mean, binomial means (およびその自然な派生物) といった典型的平均の研究を行い、これらの比として現れる多くのクラスの関数の正定値性を系統的にチェックし、結果を蓄積してきた。それらの結果をまとめて、AMS Memoirs として発表した (電子的に既に AMS より公開されており、冊子体の形でも近日中に出版されることとなっている)。これにより、Heinz 不等式の各種拡張を始めとする、パラメータを含む各種作用素平均のノルム比較に関する極めて精密な多くの結果が得られ、作用素平均の研究が大きく前進した。

(3) 我々が正定値性を判定したい平均の比の典型的なものは \cosh 及び \sinh により表されることが多い。このような二つ双曲線関数の積と他の双曲線関数の比がいつ正定値関数となるか決めることは (ii) で述べた AMS Memoirs の論文で実行されたが、より困難な問題であるその逆数の形の関数がいつ正定値となるかという問題も解決した。これは典型的な作用素平均のノルムの逆向き不等式がどのようなパラメータの範囲で成立するかを決定した事を意味する。

(4) 二項平均 B_α は作用素研究で取り扱われる平均の中で最も典型的なものの一つである。特別なパラメータ α に関するその (正定値性の意味での) 単調性は研究初期段階から分かっていたが、一般の場合の単調性は不明のままであった。この懸案の問題を更に強い形で肯定的に解決した。すなわち、二項平均 B_α は更に強く infinite divisibility の意味でパラメータ α に関して単調である事を証明した。

(5) semi-finite von Neumann 環の枠組みでの Jensen 型トレース不等式の研究に関して

は以下の新たな研究の進展が得られた:
マジョリゼーション型不等式,
トレース Jensen 不等式の等号成立条件

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① H. Kosaki, Positive definiteness of functions with applications to operator norm inequalities (pp. v + 80), to appear in Memoirs, Amer. Math. Soc. (査読有)

② T. Harada and H. Kosaki, Trace Jensen inequality and related weak majorization in semi-finite von Neumann algebra, J. Operator Theory 63 (2010) 129-150. (査読有)

③ T. Harada and H. Kosaki, On equality condition for trace Jensen inequality in semifinite von Neumann algebras, Internat. J. Math. 19 (2008) 481-501. (査読有)

④ H. Kosaki, On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, J. Funct. Anal. 254 (2008), 84-108. (査読有)

⑤ R. Bhatia and H. Kosaki, On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, Linear Algebra and Appl. 424 (2007) 84-108. (査読有)

[学会発表] (計 4 件)

① H. Kosaki, On operator means, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (Université de Franche-Comté), Besançon, 2010年9月30日

② H. Kosaki, Norm comparison for operator means: general theory and new results, Summer School and Advanced Workshop on Trend and Developments in Linear Algebra, ICTP (Trieste), 2009年7月6日

③ H. Kosaki, Trace Jensen type inequality in von Neumann algebras and related topics, Operator Algebras and Quantum Field Theory, Erwin Schrodinger International Institute of Mathematics and Physics (Vienna), 2008年11月5日.

④ H. Kosaki, On Jensen-type majorizations

in semifinite von Neumann algebras,
Noncommutative L_p -spaces, Operator
Spaces and Applications, CIRM (Luminy),
2007年7月25日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

幸崎 秀樹 (KOSAKI HIDEKI)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号：20186612

(2) 研究分担者

綿谷 安男 (WATATANI YASUO)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号：00175077