

機関番号：14401

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340037

研究課題名（和文） 粘性や緩和効果を考慮した非線形保存則の解の時間大域構造

研究課題名（英文） Time global structure of solutions of nonlinear conservation law with viscosity and relaxation

研究代表者

松村 昭孝 (MATSUMURA AKITAKA)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：60115938

研究成果の概要（和文）：解のアプリオリ評価を得るための新たな重み付きエネルギー法を幾つか提案することに成功しこれにより、流束関数が凸でないときの単独粘性保存則、粘性理想気体の方程式系、消散的波動方程式などの解の長時間挙動の解析に大きな進展を得た。また、半導体方程式の各種モデルに対し、定常解の存在と一意性、漸近安定性、各種の物理パラメータに関する方程式間の階層構造、さらには数値計算法について大きな進展を見た。

研究成果の概要（英文）：Several new weighted energy methods were successfully proposed to have a priori estimates of solutions. With the aid of these methods, has been much progressed the analysis on the large time behaviors of the solutions of scalar viscous conservation law with non-convex flux, system of equations of viscous ideal gas, dissipative wave equations, etc. Also for model equations of semiconductor, the analysis on existence, uniqueness and asymptotic stability of stationary solutions, hierarchy structures with respect to several physical parameters, and methods of numerical computation has been much progressed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2009年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2010年度	2,400,000	720,000	3,120,000
年度			
総計	9,200,000	2,760,000	11,960,000

研究分野：解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：保存則 時間大域解 長時間挙動 ナヴィエ・ストークス方程式 半導体方程式

## 1. 研究開始当初の背景

私達の身近にある気体の運動には、衝撃波や希薄波のような興味ある非線型の波が常に現れる。これらの非線型の波が現実に見せる多彩な様相は、例えば漸近安定性や境界層の問題といった数学的にも物理的にも重要な問題を提示し、航空機の空力設計や半導体設計へ応用されるなど工学的にも重要で現実的な問題を提示している。数学的にはこれら

の現象は、エネルギー散逸を考慮しない場合、保存則と呼ばれる非線型双曲形偏微分方程式系で記述される。これに物理的な粘性効果を加味したモデルは粘性的保存則、また、緩和項を加味し半線形方程式で近似を行ったものを保存則の緩和モデルという。それぞれのモデルで近年多くの研究がなされてきたが、この20年間ほどの最近の進展においては、研究代表者を始め日本のグループが世界

的な貢献を果たしてきた。特に、本研究申請の基礎となる、科学研究費補助金、基盤研究(B)平成15年度～18年度に採用された研究課題「保存則系の粘性及び緩和モデルの時間大域解とその漸近挙動に関する研究」において、圧縮性ナビエ・ストークス方程式や半導体の流体モデルの解の漸近挙動について大きな成果を上げたものの、まだ多くの未解決問題が山積する状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究では、上記の背景を踏まえ、一次元モデルの解の半空間上での漸近挙動、自由境界値問題、衝撃波や希薄波の空間次元における安定性、半導体方程式を記述する量子流体モデル方程式などの話題に焦点を絞り本分野の更なる発展を目指す。

(1) 粘性的保存則の一次元モデルの解の半空間上での漸近挙動：粘性的保存則系の一次元モデルに対する初期値問題の解の漸近挙動の問題はこれまで多くの結果が知られている。一方、半空間での問題では非線型波と境界との相互作用によって境界層と呼ばれる定常波の形成が予想されるため問題は難しくなるが、まず、粘性的保存則の典型的例である圧縮性粘性気体の方程式の $2 \times 2$ システムに対して、研究代表者、西原、カナダ・Mei等により、境界で流速が零の場合の漸近挙動が定常波の出現しない形で解決された。これを切掛けに、境界で流速が与えられる流入問題や流出問題についても、定常波を含む非線型波の相互作用の解明と解の漸近挙動について九州大学川島や研究代表者のグループにより研究が大きく進んだ。特に、 $2 \times 2$ システムの流入問題において、漸近挙動が境界層解のみまたは境界層解と希薄波の重ね合わせ、さらには境界層解と粘性衝撃波との重ね合わせの場合においても漸近安定性の結果を得た。また、圧縮性粘性流体の空間一次元理想気体モデル( $3 \times 3$ システム)に対しては、粘性的接触波の漸近安定性を示すことに始めて成功した。本研究においては、この結果の発展を目指し、 $3 \times 3$ システムに対応する粘性モデルに焦点を絞り、非線形挙動の分類とその解明を目指す。特に、 $3 \times 3$ システムに固有の粘性接触波と他の粘性的衝撃波、希薄波、定常波との相互作用を明らかにする。

(2) 衝撃波、希薄波、定常波の空間次元における安定性：非線形の波の挙動は空間次元の場合がより多彩でありかつ現実的であるが、数学解析は非常に少ない。物理的にまともな系に対する結果は希薄波の安定性について、研究代表者により、2次元オイラー方程式に人工粘性項を付したモデルで示されていることと、九州大学の川島と隠居により、物理的粘性項の場合の定常波の漸近安定

性が示されたのみである。本研究では、希薄波の結果を物理的粘性項の場合へと拡張すると共に、粘性衝撃波の安定性の糸口を探る。(3) 半導体の流体モデルの定常解とその安定性：半導体中の電子や正孔の挙動は、数学的には緩和効果を考慮した保存則系とポアソン方程式の連立となる。研究代表者は、北京首都師範大学 Li Hailiang との共同研究により、量子効果も入れた一次元モデルでは、無限遠方での状態が亜音速のみならず、超音速になっても量子効果により定常解が存在して、この定常解は漸近安定であることを示した。次に、これらの結果を空間3次元の全空間上での問題へ拡張することを試み、電流密度が零に近い場合の定常解の存在と漸近安定性を示した。さらに、等エントロピー非量子一次元モデルの初期値境界値問題を周期境界条件下で考察し、これまでドーピングプロファイルと呼ばれる外部電荷密度が定数に近いときにしか結果のなかった定常解の漸近安定性について初めて任意のドーピングプロファイルについてこれを示すことに成功した。この結果は最近連携研究者である、西畑により、より物理的な境界条件のときや、量子効果を入れたモデルにも拡張された。本研究では、これらの結果をさらにエネルギー方程式と量子効果両方を考慮したモデルに拡張することを目的とする。また、これら数学解析を背景に、現実的な数値解放の開発も目指す。

## 3. 研究の方法

詳細な基本解評価を参考にしつつ、より巧みに重み関数を構成することで、エネルギー法の見直しを行い、最小限の基本解の性質をエネルギー法と組み合わせることで必要な結果を導出する。

(1) 単独粘性保存則の解の漸近挙動について考察が不十分な問題、特に流束が凸でない場合を詳細に調べる。

(2) 一次元粘性流体の方程式の $3 \times 3$ システムの解の漸近挙動、特に、中国科学院との共同研究によって、接触不連続解に関連する場合を詳細に調べる。また、これまでの一次元で漸近安定性が示されている波の多次元安定性を調べる。

(3) 半導体の流体モデルの研究に対して、工学的にも重要なエネルギー方程式を加えた半導体の方程式(エネルギー輸送モデル)を量子効果も考慮に入れつつ考察し、これまでエネルギー効果や量子効果を考慮せずに得られていた様々な数学的結果を拡張する。

(4) 研究代表者および関西地区の分担者・連携研究者が常に参加するセミナーを毎週定期的に大阪大学で行う。

(5) 毎年7月に京都大学・数理解析研究所における研究集会「流体と気体の数学解析」に

参画し、これに参加する研究者の旅費の一部援助を行う。

(6) 毎年、数人の海外研究協力者を研究打ち合わせのため招聘すると共に、国内外の関連研究集会に積極的に参加し、討論・発表・交流を行う。

#### 4. 研究成果

##### (1) 粘性保存則の解の大域構造 :

研究代表者松村は、研究分担者、連携研究者、また中国科学院数学研究所との共同研究において、粘性保存則の解のア・プリオリ評価を得るためのエネルギー法に関し新たな手法を提案することに成功し、これらを種々の問題に応用することに成功した。例えば、単独粘性保存則の解の漸近挙動について、流束関数が凸でないときにも適用できる重み関数を構成し半空間での初期値境界値問題で大きな進展を見た。また、粘性理想気体の一次元運動を記述する  $3 \times 3$  の圧縮性ナビエ・ストークス方程式系の初期値問題に対し、非粘性部分のオイラー方程式のリーマン問題が二つの衝撃波で構成される場合や接触不連続と希薄波で構成される場合での解の長時間挙動を明らかにした。連携研究者西畑は、半直線上での熱伝導圧縮性ナビエ・ストークス方程式を考察し、流入境界条件や流出境界条件のもとに定常解の存在と漸近安定性を証明した。

(2) 半導体方程式の解の大域構造 : 研究代表者松村は、北京首都師範大学との共同研究において、半導体を記述する空間3次元での圧縮性ナビエ・ストークス方程式とポアソン方程式の系に対する初期値問題を定数自明解の周りで考察し、時間大域解の定数状態への最良の減衰評価を導いた。連携研究者の小田中は、半導体方程式の解析を行い、従来のボルツマン統計を基になされた解析をフェルミ-ディラック統計に一般化し、半導体方程式の定常解の存在を示し、構成した不動点写像が縮小写像となることを証明した。さらに、半導体における量子エネルギー輸送方程式の数値解法を開発した。連携研究者西畑は、半導体中の電子流を記述するモデルとして、熱伝導流体力学モデル、ドリフト拡散モデル等を考察し、これらモデルの大域的可解性及び、長時間挙動、さらには各種のパラメータに関する方程式間の階層構造を解明した。連携研究者柘植は、半導体の流体力学モデルに関し、unipolar 及び bipolar の両モデルに対して、定常解の存在および一意性を示すことに成功した。

(3) 消散的波動方程式の解の大域構造 : 消散項の係数が空間変数や時間変数に依存する場合の消散型波動方程式のコーシー問題を考察し、ある条件の下で、重み付エネルギー法を駆使して最良の解の減衰レートを求め

ることに成功した。

(4) 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解の大域構造 : 連携研究者柳沢は、有界領域における定常ナビエ・ストークス方程式の解の存在を保障するア・プリオリ評価 (Leray の不等式) の成立 (不成立) と境界流束及び領域の位相的性質との関係に関する新たな結果を得た。

(5) 大規模力学系の解の大域構造 : 研究分担者茶碗谷は、大自由度散逸的力学系において非自明な長時間挙動、主に間欠的挙動が現れる機構について、内部構造を持つサドル的不変集合が関与する相空間の大域的構造が興味深い現象を引き起こすことを示し、それらの構造が比較的簡単な力学系の中にも現れうることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 42 件)

① A. Matsumura, Y. Wang, Asymptotic stability of viscous shock wave for a one-dimensional isentropic model of viscous gas with density dependent viscosity, *Met. Appl. Anal.*, 17, 279-290, 2010, 査読有

② F. Huang, J. Li, A. Matsumura, Asymptotic stability of viscous contact wave with rarefaction waves for one-dimensional compressible Navier-Stokes system, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 197, 89-116, 2010, 査読有

③ T. Chawanya, P. Ashwin, A minimal system with a depth-two heteroclinic network, *Dynamical Systems*, 25, 397-412, 2010, 査読有

④ S. Nishibata, M. Suzuki, Relaxation limit and initial layer to hydrodynamic models for semiconductors, *Journal of Differential Equations*, 249, 1385-1409, 2010, 査読有

⑤ N. Tsuge, Existence and uniqueness of stationary solutions to a one-dimensional bipolar hydrodynamic model of semiconductors, *Nonlinear Anal.*, 73, 779-787, 2010, 査読有

⑥ F. Huang, A. Matsumura, Stability of a composite wave of two viscous shock waves for the full compressible Navier-Stokes equation, *Commun. Math. Phys.* 289, 841-861, 2009, 査読有

⑦ S. Nishibata, M. Suzuki, Asymptotic stability of a stationary solution to a heat-conductive hydrodynamic model for semiconductors, *Arch. Rational Mech.*

Anal., 192, 187-215, 2009, 査読有

⑧ H. Kozono and T. Yanagisawa, Nonhomogeneous boundary value problems for stationary Navier-Stokes equations in a multiply connected domain, Pacific Journal of Mathematics, 243, 127-150, 2009, 査読有

⑨ T. Shimada and S. Odanaka, A numerical method for a transient quantum drift-diffusion model arising semiconductor devices, Journal of Computational Electronics, 7, 485-493, 2008, 査読有

⑩ Hashimoto and A. Matsumura, Large-time behavior of solutions to an initial-boundary value problem on the half line for scalar viscous conservation law, Met. Appl. Anal., 14, 45-60, 2007, 査読有

[学会発表] (計 75 件)

① 松村昭孝, Asymptotic stability of viscous shock wave for a one-dimensional isentropic model of viscous gas with density dependent viscosity, 第 28 回九州における偏微分方程式研究集会, 2011. 1. 26, 九州大学 西新プラザ

② 西畑伸也, Asymptotic behavior of solutions to the Euler-Poisson equation in plasma physics, Pacific Rim Conference, 2010. 6. 30, Stanford university, U. S. A.

③ 西原健二, Large time behavior of solutions to the Cauchy problem for the semilinear damped wave equation, 2010 Chinese-German conference on fluid and gas dynamics, 2010. 5. 22, Zhejiang Normal University, Jinhua, China

④ 柳沢卓, Helmholtz-Weyl 分解とその応用, 日本数学会特別講演, 2010. 3. 26, 慶応義塾大学矢上キャンパス

⑤ 柘植直樹, 圧縮性オイラー方程式の時間大域解と漸近挙動, 日本数学会特別講演, 2009. 9. 27, 大阪大学

⑥ 柳沢卓, On the stationary Navier-Stokes equations in a 3D bounded domain under the nonhomogeneous boundary condition, Conference on "Mathematical Physics and PDEs", 2009. 9. 8, Levico Terme (Trento), Italy

⑦ 松村昭孝, A remark on global weak solution in time for a system of compressible viscous fluid with large external potential force, 共同研究集会「流体と気体の数学解析」2009. 7. 9, 数理解析研究所

⑧ 西畑伸也, Relaxation limits and asymptotic behaviors of solutions to the

hydrodynamic model for semiconductors, 12th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, 2008. 6. 13, University of Maryland, U. S. A.

⑨ 松村昭孝, 一次元粘性保存則系の解の長時間挙動 I, II, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2007. 12. 14-15, 東京大学数理解析科学研究所

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松村 昭孝 (MATSUMURA AKITAKA)  
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 60115938

### (2) 研究分担者

茶碗谷 毅 (CHAWANYA TAKESHI)  
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号: 80294148

「以下の連携研究者については全員、平成 19 年度は研究分担者、平成 20 年度～平成 22 年度は連携研究者」

### (3) 連携研究者

小田中 紳二 (ODANAKA SHINJI)  
大阪大学・サイバーメディアセンター・教授  
研究者番号: 20324858

### (4) 連携研究者

西原 健二 (NISHIHARA KENJI)  
早稲田大学・政治経済学部・教授  
研究者番号: 60141876

### (5) 連携研究者

西畑 伸也 (NISHIBATA SHINYA)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号: 80279299

### (6) 連携研究者

柳沢 卓 (YANAGISAWA TAKU)  
奈良女子大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号: 30192389

### (7) 連携研究者

小松 玄 (KOMATSU GEN)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 60108446

### (8) 連携研究者

柘植 直樹 (TSUGE NAOKI)  
岐阜大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 30449897

### (9) 連携研究者

庵原 隆雄 (IOHARA TAKAO)  
大阪大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号: 00294140