

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340039

研究課題名（和文） パンルヴェ系の理論とその新展開

研究課題名（英文） Theory of Painlevé systems and its new development

研究代表者

梶原 健司 (KAJIWARA KENJI)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：40268115

研究成果の概要(和文): パンルヴェ系と呼ばれる2階の可積分な非線形微分方程式・差分方程式の族の理論を, 系のアフィンワイル群対称性や代数幾何学的構造を駆使して構築した. その枠組みを用いて, 解として現れる超幾何関数の系列を全て決定するなど, 解に関する詳細な研究成果を得た. また, パンルヴェ系の理論の高階・高次元化への一般化を行った. さらに得られた結果にもとづき, 離散ソリトン系, 離散微分幾何, 可解カオス系, トロピカル幾何, 複素力学系, ランダム行列などさまざまな分野へ理論を展開した.

研究成果の概要(英文): Theory of the Painlevé systems, which are a certain family of second-order nonlinear integrable differential and difference equations, has been constructed by using the underlying affine Weyl group symmetries and algebraic geometric structures. Based on this framework, detailed studies on solutions have been carried out, such as determination of the sequence of hypergeometric functions arising as solutions. Also, generalizations of the theory of Painlevé systems have been developed to higher-order and higher-dimensional systems. Moreover, based on the results obtained above, the theory has been extended to various areas, such as discrete soliton equations, discrete differential geometry, solvable chaotic systems, tropical geometry, complex dynamical systems, and random matrices.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2010年度	2,100,000	630,000	2,730,000
年度			
総計	7,300,000	2,190,000	9,490,000

研究分野: 可積分系の理論

科研費の分科・細目: 数学・大域解析学

キーワード: パンルヴェ系, 離散可積分系, 超幾何関数,  $\tau$  関数, 可解カオス系, 超離散化

## 1. 研究開始当初の背景

20世紀初頭にパンルヴェによって発見された6種のパンルヴェ微分方程式は, 1970年代にIsing模型の相関関数がパンルヴェIII型方程式の解で記述されることが見いだされて以来, 可積分系の理論の中で非線形の特殊関数を定義

する重要な方程式であることが認識されるようになり, 1980年前後にJimbo-Miwa, Okamotoらによって数学的な整備が進んだ. 1990年頃にランダム行列理論の文脈でパンルヴェ方程式の離散類似が発見され, Grammaticos-Ramaniらによって組織的な研究が推進された. 本研究の代表

者らは超幾何型特殊解や代数解の研究から離散パンルヴェ方程式の構造を解き明かし、Noumi-Yamadaらのアフィンワイル群の双有理表現を駆使した構造理論を武器に、代数的な研究が推進された。1998年にSakaiによって2階の離散パンルヴェ方程式・パンルヴェ微分方程式(以下、パンルヴェ系と呼ぶ)の初期値空間の代数幾何学的考察による分類理論が構築されたことにより、より組織的な研究が可能になった。特にSakai理論によって、2階のパンルヴェ系の頂点に位置する方程式として $E_8^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性を持った楕円パンルヴェ方程式が得られ、全てのパンルヴェ系はそれから退化で得られることが明らかになった。Kajiwara-Masuda-Noumi-Yamada-Ohtaは2003年にBäcklund変換のなす対称性の代数的な考察と、時間発展の代数幾何学的な特徴付けを用いて楕円パンルヴェ方程式を考察し、特に超幾何型特殊解として楕円超幾何関数 ${}_{10}E_9$ (または ${}_{12}V_{11}$ )が現れることを見いだした。これは2階の線形差分方程式で特徴付けられる性質のよい超幾何関数の頂点に位置するものである。これを契機に2004-2006年に2階の $q$ -パンルヴェ系の超幾何型特殊解に現れる超幾何関数が全て同定されるなど、2階のパンルヴェ系の理解が急速に進んだ。

以上の経緯の上で、22通りに分類される2階のパンルヴェ系でまだ埋められていない部分を埋め、枠組みの一般化(高次元化・高階化)を行い、かつ、具体的な超幾何 $\tau$ 関数や離散パンルヴェ系の時間発展の幾何学的な定式化などを通じて他の分野との接点を探り、理論の新しい展開を図るという着想が得られた。

## 2. 研究の目的

6種のパンルヴェ微分方程式を典型例とする、有限自由度の可積分な関数方程式およびその一般化(高階・多変数)を「パンルヴェ系」と称し、その理論の整備・深化と得られた成果の他分野への展開を図ることが目的である。

(1)パンルヴェ系の理論の整備:坂井理論(2階のパンルヴェ系の代数幾何学的構造理論)で分類された個々のパンルヴェ系について、以下の研究を行う。

- ① $\tau$ 関数の理論と特殊解(超幾何解・代数解)の研究
- ②補助線形問題(Lax pair)の構成と考察

(2)パンルヴェ系の理論の深化と拡張

- ①パンルヴェ系(特にパンルヴェ VI 型方程式)の複素力学系的考察による解の大域構造の研究
- ②パンルヴェ系の高階化, 階層構造, 多変数化

(3)パンルヴェ系の理論の展開:パンルヴェ微

分方程式だけでなく、離散パンルヴェ系それ自身やそれらの研究から得られた概念・手法を他分野へ展開し、新しい知見を加えること。

- ①非自励離散可積分系への応用
- ② $q$ -UC階層など新しい可積分系理論の展開
- ③可解カオス系とトポカル幾何への応用
- ④ランダム行列理論やさまざまな確率モデルへの応用

## 3. 研究の方法

上記の目的を達成するために、以下のような組織を構成して研究を行った。

- (1)研究の総括:梶原
- (2)パンルヴェ系の理論の整備:主に2階のパンルヴェ系に関して、代数的・幾何学的な手法を用いて、アフィンワイル群の双有理表現を用いた定式化と解の構築、また代数幾何学的考察からLax pairを構成する。担当:梶原, 増田, 野海, 山田, 津田
- (3)パンルヴェ系の理論の深化と拡張:リーマン・ヒルベルト対応を通じたパンルヴェ方程式の複素力学系的研究を行い、また、パンルヴェ系の高階化や高次元化の研究を行う。担当:岩崎, 坂井, 津田
- (4)パンルヴェ系の理論の展開:以上で得られた結果と他分野の接点を探り、パンルヴェ系の理論の展開を図る。担当:梶原, 津田, 白井

## 4. 研究成果

(1)パンルヴェ系の理論と整備

①E型アフィンワイル群対称性を持つ離散パンルヴェ方程式の超幾何解を構成した。これで、超幾何解を持つとされる全ての2階のパンルヴェ系について、解として現れる超幾何関数が全て同定されたことになる。E型アフィンワイル群対称性を持つパンルヴェ系について、アフィンワイル群の作用と整合的な超幾何 $\tau$ 関数を完全に決定した。

②離散パンルヴェ方程式に対して「対称化」と呼ばれる特殊化を施して得られる方程式を考察した。この操作で得られる方程式については、解として現れる超幾何関数が特殊化前と異なること、また、 $\tau$ 関数の行列式構造に非対称性が現れることが知られており、1990年代前半の離散パンルヴェ系の研究初期から謎とされていた。この問題について、方程式に作用するアフィンワイル群の $\tau$ 関数のレベルでの双有理表現を用いて詳細に考察し、それらの現象のメカニズムを解明した。また、対称化の一般化して「射影簡約」の概念を提案した。

③補助線形問題については、代数幾何学的な定式化によって、2階パンルヴェ系の頂点に位置する「楕円パンルヴェ方程式」のLax pairの具体的な構成に成功し、決定的な結果を得た。

(2) パンルヴェ系の理論の深化と拡張

- ① パンルヴェ VI 型方程式について, リーマン・ヒルベルト対応を通じて複素力学系・代数幾何学的な考察によって代数解の大域的な構造を詳細に明らかにした. また, 方程式に付随する有理曲面上のエントロピー正の離散力学系を考察し, 孤立周期解の個数の具体的な計算を行い, またマルコフ・パンルヴェ超越函数の概念を通じて数論的な対象への展開を行った.
- ② UC 階層の相似簡約により, パンルヴェ系・ガルニエ系の一般化を与えるある種のシュレジンガー系を得て, 超幾何解の構成に成功した.
- ③ 4 階のパンルヴェ型微分方程式に対して初期値空間の代数幾何学的観点から考察を行い, それらの完全な分類を与えた.

(3) パンルヴェ系の理論の展開

- ①  $q$ -UC 階層とその有理解の理論を定式化し, 相似簡約で  $q$ -パンルヴェ系とその有理解を普遍指標の特殊化として得た.
- ② パンルヴェ系の研究で得られた手法を応用して, 離散ソリトン系の不均一格子上への組織的な拡張に成功し, 現在その成果を離散微分幾何に展開中である.
- ③ 本研究で得られたパンルヴェ系の代数幾何学的理論にヒントを得て, 可解カオス系およびその一般解の超離散化に成功し, 区分線形可解カオス系の背後のトロピカル幾何の構造を明らかにした. 超離散化としては, 「負号の問題」を克服した初めての非自明な例であろう.
- ④ さまざまな積分核から定まるランダム行列やそれに付随する行列式点過程の研究を推進し, 中心極限定理など確率論的な性質を詳細に議論した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 39 件)

- ① M.Hay, K. Kajiwara and T. Masuda, Bilinearization and special solutions to the discrete Schwarzian KdV equation, J. Math-for-Ind. 3 巻, 2011 年, 査読有, pp. 53-62.
- ② T. Masuda, Hypergeometric  $\tau$ -functions of the  $q$ -Painlevé system of type  $E_8^{(1)}$ , Ramanujan J. 24 巻, 2011 年, 査読有, pp.1-31.
- ③ K. Kajiwara, N. Nakazono and T. Tsuda, Projective reduction of the discrete Painlevé system of type  $(A_2+A_1)^{(1)}$ , Int. Math. Res. Notices, 2010 年, 査読有, doi:10.1093/imrn/rnq089.
- ④ T. Shirai, Exact computation for the cover times of certain classes of trees, J. of

Math-for-Ind. 査読有, 2 巻, 2010 年, pp.93-98.

- ⑤ T. Shirai, A remark on monotonicity for the Glauber dynamics on finite graphs, Proc. Japan Acad. Ser.A: Math. Sci, 査読有, 86 巻, 2010 年, pp.33-37.
- ⑥ K. Iwasaki, On the Markoff-Painlevé transcendents, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1699 巻, 2010 年, pp.160-167.
- ⑦ K.Iwasaki and T.Uehara, Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces, Math. Z., 査読有, 266 巻, 2010 年, pp.289-318.
- ⑧ T. Tsuda, On an integrable system of  $q$ -difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to  $q$ -Painlevé equations, Commun. Math. Phys., 査読有, 293 巻, 2010 年, pp. 347-359.
- ⑨ K. Kajiwara and Y. Ohta, Bilinearization and Casorati determinant solutions to non-autonomous 1+1 dimensional discrete soliton equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B13 巻, 2009 年, pp.53-74.
- ⑩ K. Kajiwara, M. Kaneko, A. Nobe and T. Tsuda, Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve, Kyushu J. Math., 査読有, 63 巻, 2009 年, pp.315-318.
- ⑪ T. Masuda, Hypergeometric  $\tau$ -functions of the  $q$ -Painlevé system of type  $E_7^{(1)}$ , SIGMA, 査読有, 5 巻, 2009 年, doi:10.3842/SIGMA.2009.035.
- ⑫ 岩崎克則, Monodromy of Painlevé VI equation around classical special solutions, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1662 巻, 2009 年, pp.136-147.
- ⑬ 坂井秀隆, モノドロミー保存変形と 4 次元パンルヴェ型方程式, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1662 巻, 2009 年, pp. 65-72.
- ⑭ Y. Yamada, A Lax formalism for the elliptic difference Painlevé equation, SIGMA, 査読有, 5 巻, 2009 年, doi:10.3842/SIGMA.2009.042.
- ⑮ Y. Yamada, Padé method to Painlevé equations, Funkcial. Ekvac., 査読有, 52 巻, 2009 年, pp.83-92.
- ⑯ K. Kajiwara, A. Nobe and T. Tsuda, Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 41 巻, 2008 年, 395202 (13pp).
- ⑰ 梶原健司, E 型アフィンワイル群対称性を持つ加法的離散 Painlevé 方程式の超幾何解, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, 査

読無, 19ME-S2, 2008 年, Article No.3.

- ⑱ K.Iwasaki, Finite branch solutions to Painlevé VI around a fixed singular point, Adv. Math., 査読有, 217 巻, 2008 年, pp.1889-1934.
- ⑲ H.Osada and T.Shirai, Variance of the linear statistics of the Ginibre random point field, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B6 巻, 2008 年, pp.193-200.
- ⑳ T. Hamamoto and K. Kajiwara, Hypergeometric solutions to the  $q$ -Painlevé equation of type  $A_4^{(1)}$ , J. Phys.A: Math. Theor. 査読有, 40 巻, 2007 年, pp.12509-12524.

[学会発表] (計 73 件)

- ① K.Kajiwara, Discretization of integrable systems-From nonlinear waves to geometry, Distinguished Lecture, 2011 年 2 月 17 日, テキサス大学パンアメリカン校数学教室(アメリカ)
- ② 白井朋之, 確率論における共形普遍性, 東大数理談話会, 2011 年 1 月 28 日, 東京大学数理科学研究科(東京都).
- ③ T. Shirai, Determinantal point processes and the zeros of analytic functions, Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, 2010 年 12 月 16 日, 京都大学数理解析研究所(京都市).
- ④ 岩崎克則, 複素曲面上の正則力学系について, 複素解析的場・葉層構造とその周辺, 2010 年 11 月 22 日, 龍谷大学セミナーハウス(京都府).
- ⑤ K. Iwasaki, Dynamics of the sixth Painlevé equation, 4<sup>th</sup> Workshop on Hamiltonian systems and related topics, 2010 年 10 月 15 日, 新潟大学サテライトキャンパス(新潟市).
- ⑥ K. Kajiwara, Ultradiscretization of solvable chaotic system associated with the Hesse cubic curve, 9<sup>th</sup> Workshop on Symmetries and Integrability of Difference Equations, 2010 年 6 月 16 日, ヴァルナ(ブルガリア)
- ⑦ K.Kajiwara, Ultradiscretization of solvable chaotic systems, Symmetry Plus Integrability, 2010 年 6 月 11 日, サウスパドレ島(アメリカ合衆国)
- ⑧ 梶原健司, Mike Hay, Discrete Schwarzian KP 方程式の双線形化と簡約, 2010 年 3 月 26 日, 日本数学会 2010 年度年会, 慶應義塾大学(横浜市).
- ⑨ 梶原健司, 可積分系入門, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル, 2010 年 2 月 22 日, 九州大学(福岡市).
- ⑩ Tomoyuki Shirai, Determinantal point processes associated with certain reproducing kernels, The First CREST-SBM International Conference "Random Media", 2010 年 1 月 25 日, 仙台国際センター(仙台市).
- ⑪ 岩崎克則, A note on Markoff-Painlevé transcendent, 複素力学系とその関連分野の総合的研究, 2009 年 12 月 18 日, 京都大学数理解析研究所(京都市).
- ⑫ 白井朋之, 行列式型確率と離散構造, 第 9 回離散幾何解析セミナー, 2009 年 11 月 27 日, 京都大学(京都市).
- ⑬ 梶原健司, 可解カオス系の超離散化, 非線形波動研究の現状と将来, 2009 年 11 月 20 日, 九州大学応用力学研究所(福岡県春日市)
- ⑭ 白井朋之, Determinantal probability and its related topics, 研究集会「多様体上の微分方程式」, 2009 年 10 月 30 日, 呉羽ハイツ(富山市).
- ⑮ 梶原健司, 金子昌信, 野邊厚, 津田照久, Hesse の 3 次曲線に付随する 2 次元可解カオス系の超離散化, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会, 2009 年 9 月 24 日, 大阪大学(大阪市)
- ⑯ K. Kajiwara, Hypergeometric solutions to the symmetric discrete Painlevé equations, Discrete systems and special functions, 2009 年 7 月 3 日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (イギリス)
- ⑰ K. Kajiwara, Ultradiscretization of solvable chaotic maps and the tropical geometry, Geometric aspects of discrete and ultradiscrete integrable systems, 2009 年 4 月 2 日, グラスゴー大学(イギリス)
- ⑱ 梶原健司, 中園信孝, 津田照久,  $q$ -パンルヴェ方程式の対称化とその超幾何解, 研究集会「非線形波動の数理と物理」, 2008 年 11 月 6 日, 九州大学応用力学研究所(福岡県春日市)
- ⑲ 梶原健司, Non-autonomous discrete KdV 方程式の双線形化と Casorati 行列式解, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学(東京都)
- ⑳ K.Kajiwara, Hypergeometric solutions to the Painlevé systems, International Workshop on Symmetries and Integrability of Difference Equations, 2008 年 6 月 23 日, Hotel Mont-Gabriel, Sainte-Adèle, Quebec(カナダ).

[図書] (計 2 件)

- ① 若山正人編, 岩波書店, 可視化の技術と現代幾何学, 2010 年, 47-92.
- ② 野海正俊, 日本評論社, オイラーに学ぶ『無限解析序説』への誘い, 2007 年, 125 ページ.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

梶原 健司 (KAJIWARA KENJI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号:40268115

(2)研究分担者

白井 朋之(SHIRAI TOMOYUKI)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号:70302932  
岩崎 克則(IWASAKI KATSUNORI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号:00176538

(3)連携研究者

野海 正俊(NOUMI MASATOSHI)  
神戸大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:80164672  
山田 泰彦(YAMADA YASUHIKO)  
神戸大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:00202383  
坂井 秀隆(SAKAI HIDETAKA)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号:50323465  
増田 哲(MASUDA TETSU)  
青山学院大学・理工学部・准教授  
研究者番号:21740126  
津田 照久(TSUDA TERUHISA)  
九州大学・大学院数理学研究院・助教  
研究者番号:21740123