

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19340040

研究課題名 (和文) 複素力学系と作用素環の研究

研究課題名 (英文) Study on Complex dynamical systems and operator algebras

研究代表者

綿谷 安男 (WATATANI YASUO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：00175077

研究代表者の専門分野：関数解析

科研費の分科・細目：数学・大域解析

キーワード：作用素環 複素力学系 C*-環

1. 研究計画の概要

(1) この研究では有理関数や超越整関数などの複素平面上の有理型関数 R の反復合成 $(R^n)_n$ による複素力学系から、ヒルベルト空間上の作用素からなる C*-環を構成する。この研究の目的は複素力学系と作用素環という二つの異なった分野の思いもかけない結びつきを解明することである。

(2) 2 次以上の有理関数は位相同型写像ではないので、接合積でもって作用素環を構成することができない。そこでこれをリーマン球面上の有限被覆写像なので、分岐指数を使ってそのグラフ上の連続関数全体は係数環上の双加群になる。この双加群から Cuntz Pimsner 構成を使って C*-環を対応させる。リーマン球面全体と Julia 集合と Fatou 集合のそれぞれ上で考えることで、3 つの C*-環を構成する。

(3) 分岐点のような特異点の構造と付随する C*-環との関連を研究する。その C*-環上の K 理論や KMS 状態(平衡状態)の言葉で、元の特異点の構造を記述することを目指す。

2. 研究の進捗状況

(1) 複素平面上の有理関数 R の反復合成 $(R^n)_n$ による複素力学系から、C*-環を構成できた。不安定な領域である Julia 集合上に制限して作った C*-環は真無限な単純 C*-環になった。これは Julia 集合の自己相似性を反映して、作用素環も自己相似性を持つことを示しており興味深い。

(2) $R(z) = z^n$ や $R(z) = z^2 - 2$ のような典

型的な例についてはその C*-環の K 群を計算できた。しかし、ゲージ作用の不動点環の K 群の計算はまだ求められていない。

(3) ゲージ作用に対する KMS 状態の完全分類に成功した。その系として特異点の構造を作用素環の言葉で表すことが可能になった。有理関数 R の次数を $\deg R$ とおくと、逆温度 $\beta = \log \deg R$ で状態遷移がおこっている。それにより、有理関数 R の次数だけでなく、分岐点の個数、例外点の個数、例外点の軌道という情報を KMS 状態の情報から復元することができた。もう少し詳しく述べよう。有理関数 R の例外点が $\{a, b\}$ からなり $R(a) = b$ 、 $R(b) = a$ となっている場合は分岐点も $\{a, b\}$ からなる。この時、逆温度 β の KMS 状態の端点は次のように完全分類できた。(ア) $\beta = 0$ の時は、KMS 状態の端点は 1 個でトレースになる。

(イ) $0 < \beta < \log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は 2 個で、例外点 a と b のディラック測度に対応している。

(ウ) $\beta = \log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は 3 個で例外点 a と b のディラック測度と Lyubich 測度に対応している。

(エ) $\beta > \log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は分岐点に対応しており、この場合は a と b のディラック測度に対応して 2 個になる。

有理関数 R の例外点が 1 個や 0 個の場合も類似の完全分類が可能である。そして $\beta > \log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は分岐点に対応している。 $0 < \beta < \log \deg R$ の時は KMS 状態の端点は例外点に対応している。

(4) ゲージ作用に対する KMS 状態の完全分類は、自己相似集合に付随する C^* -環の場合にも同様な結果を得ることができた。

(5) 有理関数の代わりに、2変数多項式 $P(x, y) = 0$ で表される代数的対応に対して C^* -環を構成した。真無限単純 C^* -環になる十分条件やいくつかの具体例で K 群を計算した。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。
なぜなら、基本的な研究課題である分岐点のような特異点の構造と付随する C^* -環との関連がかなり解明できたからである。対応する C^* -環上の K 理論や KMS 状態 (平衡状態) の言葉で、元の特異点の構造を記述できたことが大きい。

4. 今後の研究の推進方策

付随した C^* -環上にはゲージ作用がある。その不動点環の構造が解明できていない。複素力学系と記号力学系との類似を考えると、この不動点環の K 理論が複素力学系の有力な不変量になる可能性がある。現在の研究を発展させてこれに取り組みたい。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① N. Nawata and Y. Watatani, Fundamental group of simple C^* -algebras with unique trace, to appear in Adv. Math.
- ② H. Hamada and Y. Watatani, Toeplitz composition C^* -algebras for certain finite Blaschke products, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- ③ M. Enomoto and Y. Watatani, Indecomposable representations of quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces, J. Funct. Anal. 256 (2009), 959--991.
- ④ M. Ionescu and Y. Watatani, C^* -algebras associated with Mauldin-Williams graphs, Canad. Math. Bull. 51 (2008), 545-560.
- ⑤ M. Izumi, T. Kajiwara and Y. Watatani, KMS states and branched points, Ergodic Th. & Dynam. Sys. 27 (2007), 1887-1918.
- ⑥ M. Enomoto and Y. Watatani, Exotic indecomposable systems of four subspaces in a Hilbert space, Integr. Equ. and Oper. Theory 59 (2007), 149-164.

[学会発表] (計 10 件)

- ① Y. Watatani, Fundamental group of simple C^* -algebras with unique trace,

University of Victoria, Victoria, Canada, July, 2009.

② Y. Watatani, Composition operators and C^* -algebras associated with complex dynamical systems. Asia Mathematical Conference 2009, Kuala Lumpur, Malaysia, June, 2009.

③ Y. Watatani, Complex dynamical systems and associated C^* -algebras, Lorentz Center, Leiden, Netherlands, July, 2008.

④ Y. Watatani, C^* -algebras associated with algebraic correspondences, Bunff International Research Station, Bunff, Canada, January, 2008.

⑤ Y. Watatani, Branched points and C^* -algebras associated with complex dynamical systems, Hanyang University, Seoul, Korea, June, 2007.