様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22　年　6　月　4 日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2008
課題番号：19500008
研究課題名（和文）　リニアカテゴリ上の計算体系の性質の研究

研究課題名（英文）　Studies on Properties of a Computation System over the Linear Category

研究代表者
長谷川　立（Hasegawa Ryu）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20243107

研究成果の概要（和文）：　圏論に基づいた新しい計算体系の研究を行った。プログラミング言語の基礎となる計算体系であるラムダ計算と、数学の基礎理論である圏論との関連は古くから知られている。当研究は、圏論を計算体系として再構成することで、数学的に確たる基盤をもった計算体系を構築することを目的とした研究の一環である。特に古典的リニア・カテゴリ上に計算規則を導入した体系を考案し、その性質の研究を行った。

研究成果の概要（英文）： We studied novel computation systems based on category theory. Relations between the lambda calculus, which forms a basis of programming languages, and the category theory, which is a foundation of mathematics, are well-known. This project is a part of a series of researches toward construction of computation systems based on rigid mathematical foundations, restructuring category theory as computation systems. In this project, we developed a computation system over the classical linear category, and we studied its properties.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：ラムダ計算・圏論

１．研究開始当初の背景
ラムダ計算がプログラミング言語の中核として、コンピュータの黎明期より使い続けられている理由は、もちろん、それが計算の概念を簡潔に定式化しているからである。さらに、豊かな数学的構造がラムダ計算を背後から支えていることも、大きな理由の一つであろう。そのもっとも基本的な枠組みが、型付きラムダ計算と圏論との同等性である。古典的な Scott 意味論に代表されるように、プログラミング言語のもつ「静的な」性質の解析に、この同等性は役立てられてきた。ここで

静的と強調しているのは、ラムダ計算がになう「計算」の部分を無視していることに注意を促すためである。3+6は9と計算されて逆ではないように、ラムダ計算の表す計算には向きがあるにもかかわらず、圏論との、同等性は、向きを無視することで始めて成立する者であった。

２．研究の目的

我々の一連の研究の目的は、ラムダ計算と圏論との関連を、計算まで含んだ「動的な」関係性に拡張することである。すなわち、ラムダ計算に動的な機能としての計算があるように、数学的対象としての圏論の側にも計算の概念を導入して、それらの関係を確立することである。

３．研究の方法

この項に関しては、述べることはあまり多くない。純粋に理論計算機科学の研究であるから、体系を提案して、その性質を理論的・数学的に検討するのが、標準的な研究スタイルである。したがって特殊な設備などは必要としない。

４．研究成果

⑴　線形論理の圏論モデルであるリニアカテゴリ上に計算体系を構成した。

古くから知られた圏論モデルは、型付きラムダ計算に対するカルテジアン閉圏を用いたモデルである。しかしカルテジアン閉圏の上に計算体系を導入するアイデアは、あまりうまく機能しない。ラムダ計算における計算概念である簡約には、圏論の側では随伴が対応するのだが、その処理は圏論の上の計算体系でもかなりうまくいく。問題となるのは、まわりを取り巻く直積型などの構造である。

我々のアイデアは、古典的なラムダ計算・カルテジアン閉圏をあきらめて、線形論理・リニアカテゴリを用いるというものである。ラムダ計算におけるリソースの使い方などを、より精密にコントロールできるようにした体系が線形論理である。すなわち、カルテジアン閉圏では大雑把すぎる部分を、精密に扱えるような圏論モデルを考えるのがポイントである。

以前の研究において、直観主義的な線形論理に対する圏論モデルの上に体系を構築したが、今研究においては、古典的な線形論理に対する圏論モデルの上に計算体系を構築した。随伴の部分は、*-autonomous圏の構造で置き換えられる。随伴の unit・counit が相互に作用することが議論を複雑にしていたのだが、*-autonomous圏を用いると、独立に動くようになる。

-autonomous 圏の射に対してその基本的な構造で同値類を入れる。射の同値類の上の書き換え規則として、計算体系化される。リソースを扱う部分は、ある種の symmetric monoidal comonad として導入される。それが満たす図式を計算規則として読み替えることで計算体系が構築される。具体的には２１個の規則が、リソースの分配を扱う規則として導入される。線形論理における $\beta\eta$ 規則は、-autonomous圏における２つの簡約規則に翻訳される。

関連研究として、Ghani らによるカルテジアン閉圏の上に計算体系を導入する試みがあるが、上に述べたようにあまりうまく機能していない。かわりに線形論理の圏論モデルを用いるというアイデアは、我々独自のものである。

もともとは、線形論理に対応する圏論モデルの上に計算体系を導入するという動機で始めたので、線形論理の計算規則と類似の構造が得られると考えていたが、実際にできたものを見てみると、むしろ違いが目立つ。リソースの細やかな扱いが、かなり明示的に処理できるようになっているのが特徴的である。以前よく研究されていた explicit substitution の体系と共通な特徴がある。その意味で、リニアカテゴリ上の計算体系は、線形論理の計算規則をさらに細分化したシステムがということができる。

⑵　リニアカテゴリ上の計算体系と、グラフ書き換えによる計算体系とを比較し、その関連を調べた。

ラムダ計算やその亜種としての線形論理には、グラフを用いた計算体系が知られている。グラフ・ドローイングによって図式化することでビジュアル的に処理できるという側面もあるが、文法上の非本質的な差異を捨象して本質部分を切り出しているというのが重要である。また、通常のラムダ項では見えにくい、リソースの分配が明示的に標記できるようになるというアドバンテッジもある。後者の特徴は、前項で述べた我々の体系の特徴と共通である。そこで、グラフ書き換えを用いた体系と、我々の体系との比較が自然と意味をもってくる。

具体的に対象としたのは、Girard の proof net と、Lamping グラフである。Proof net は古典的線形論理の証明図をグラフィカルに表現したものとして、よく知られている。Lamping グラフは、ラムダ計算の β 簡約におけるコピーの問題を検証し、共有できるデータをできるだけ共有し続けることによって、ある意味で最適な簡約メカニズムを提供するために考案されたものである。もともとは、ラムダ計算を対象に作られたものであるが、線形論理と親和性が高いことは、以前より指摘されている。

これらのグラフィカルなシステムと比較

するために、我々の体系をグラフとして表現する方法を与えた。それにより、射の同値類によって同値と見なされる射を、大略ひととおりのグラフとして表すことができる。これを用いて、proof net や Lamping グラフとの比較を行った。

Proof net はその中で一番保守的であって、セマンティクスに対し完全ではない。完全になるように規則を付け加えることは可能であろうが、たとえそうしたとしても、局所的に非完全である。それはたとえばコピー演算子の naturality に対する扱いとなって現れる。Proof net においては、box という概念がひとつの主体となっていて、ひとたび box の中にとじこめられた構造は、以後、不可分なものとなって、たとえばコピーされる際にもまとめてコピーされることになる。これが、リソースの処理の精密なコントロールを妨げている。

一方、Lamping グラフは一番先進的である。コピーなどは最小のリンク単位で行われることになる。しかし、それによって、セマンティクスに対して局所的に健全ではなくなっている。グラフが正当に証明図やラムダ項を表しているかどうかは、大局的な性質であって局所的には決定できない。にもかかわらずリンクの接続具合を局所的に改変することを許しているので、局所的な健全性が崩れている。

それに対し、我々の体系は局所的にも大局的にも、健全かつ完全である。このことは数学的に健全かつ完全なモデルの上に体系を構築していることから当然である。つまり、box 単位では粗すぎ、リンク単位では細かすぎるところを、適切な意味を持つ構造を単位として扱っていることになっている。この意味で、proof net と Lamping グラフの間に位置するのが我々の体系であると結論づけることができる。

ただし、我々の体系のような射の同値類の上に構築した計算体系は、そのまま実装するには不適切である。実装する際には、リンク単位での処置を行うしかないかもしれない。そのような観点から、Lamping グラフと我々の体系との間の関連を調べて、局所的には崩れている Lamping グラフの健全性が、大局的には保証されているのかどうか検討することが今後の課題になるだろう。

⑶ Church-Rosser 性の研究

計算体系の妥当性を主張するための方法は重層的である。一つは、モデルを定式化して、健全性や完全性を主張することであるが、これに関しては、そもそも構成法によって保証されている。他の方法は、計算体系に望まれる性質をもっていることを示すことである。当研究では、Church-Rosser 性の研究を行った。Church-Rosser 性は、計算結果が計算順序に依存しないことを保証するための、基本的な性質であって、計算体系の妥当性を主張するための一つのファクターである。ラムダ計算の Church-Rosser 性の証明に対しては、並列簡約などの基本的な手法が確立されているが、われわれの体系はそれとは大きく異なるので、既存の手法が簡単に適用できるようには思えない。特に symmetric monoidal comonad の部分をどう扱うかは、まったく先例がないので、アイデアを必要としている。

我々が考えたのは、具体的なセマンティクスを用いる方法である。以前から継続している研究において、ラムダ計算に対する Girard の正規関手モデルの解析を扱ってきた。これは自然に線形論理のモデルにもなっている。また、整数係数の冪級数でラムダ項の意味を記述できるなど、具体的な構造の解析が可能な形をしている。この正規関手モデルを、Church-Rosser 性の証明に用いる方法を我々は開発した。Church-Rosser 性は純粋にシンタクティックな性質であって、その証明に具体的な数学モデルを援用する方法はあまり見たことがない。少なくとも正規関手モデルを用いる方法は始めてであろう。

我々が(ほぼ)示したことは、体系の弱正規性の仮定のもとでの、Church-Rosser 性である。証明のアイデアは以下のようなものである。もし二つの正規形が異なるならば、正規関手セマンティクスにおいて異なる意味を持つことを示す。これが示せたならば、Church-Rosser 性が系として得られる。これが証明の骨子である。

そのために第一に、我々の体系における、正規形の特徴付けを与えた。リソースの処理を行う機能をになう symmetric monoidal comonad の使用法に関する正規形を与えたことに相当する。このように特徴づけられた正規形に対して、正規関手セマンティクスでの意味を対応づけるためには、前項で述べたグラフを用いた表現を利用した。これにより、正規関手セマンティクスでの意味を特徴づける generic form が得られる。あとは異なる generic form から異なる意味が出てくることを示せば良い。

この手法で扱えているのは、ユニット型以外の部分である。ユニット型に関しては、正規関手モデルはつぶしてしまっているので、現在の手法ではユニット型に関する性質は示せない。ユニット型を適切に扱うには、新たなアイデアを必要としている。しかし、別の観点から見ると、ユニット型の計算においての役割はあまり定かでない。そのもっている意味について検証する方向も必要であろう。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

[1] M. Tatsuta, K. Fujita, R. Hasegawa, and H. Nakano, Inhabitation of polymorphic and existential types, A. Pure Appl. Logic, in printing, 2010.

〔学会発表〕（計２件）

[1] R. Hasegawa, Inhabitance of Existential Types is Decidable in Negation-Product Fragment (with M.~Tatsuta, K.~Fujita, and H.~Nakano), 35th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2008) Reykjavik, Iceland, Jul. 2008.

[2] 長谷川立, リニアカテゴリ上の計算体系 LC のチャーチ・ロッサー性について：部分的解決, 理論計算機科学と圏論ワークショップ 2010, CSCAT 2010, 京都, 2010 年 3 月.

６．研究組織

(1)研究代表者

長谷川　立（Hasegawa Ryu）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20243107

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

外山　芳人（Yoshihito Toyama）
東北大学・電気通信研究所・教授
研究者番号：00251968
（平成１９年度→２０年度：研究分担者）