

研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2007～2008  
 課題番号：19500011  
 研究課題名（和文） 畳込み符号およびLDPC畳込み符号のエラートレリス構造に関する研究  
 研究課題名（英文） Study on the error-trellis complexity of convolutional codes and LDPC convolutional codes

研究代表者  
 田島 正登 (TAJIMA MASATO)  
 富山大学・理工学研究部（工学）・教授  
 研究者番号：20251879

研究成果の概要：畳込み符号の検査行列を  $H(D)$  とする。エラー系列は、 $H(D)$  から導かれるエラートレリスと呼ばれる遷移図を用いて表現できる。従来、エラートレリスに関する研究は非常に限られている。本研究では、ある意味で最適な最小エラートレリスの構成法を与えている。特に、 $H(D)$  が特別な形をしている場合、エラートレリスの状態複雑度を従来法より低減できる方法を提案している。また、この結果をLDPC畳込み符号に適用し、従来想定されなかった“トレリスに基づく復号”の可能性について検討している。

（説明：Low Density Parity Check (LDPC) 符号は非常に疎な検査行列で定義されるブロック符号。その畳込み符号バージョンがLDPC畳込み符号である。）

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：情報数理論、符号理論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 1993年 Berrou 等により提案されたターボ符号はそれまでの符号理論の方法論を大きく変えたと言える。ところが、この革命的な事柄の原点は更に過去に遡れることが示された。それは、1960年代の初めに Gallager によって提案されていた低密度パリティ検査(Low Density Parity Check: LDPC)符号

である。ターボ符号と同様、繰り返し復号法と組み合わせることにより、Shannon 限界に近づく誤り訂正能力を持つことが明らかになった。また、従来と異なり、符号をグラフ(Tanner graph)表現し、このグラフ上のノード間でいわゆる確率伝播を繰り返し行うことで復号が達成される。ここでも新しい方法論が適用されるようになったと考えられる。

(2) 一方、このような動向を踏まえてもなお、符号を表現するトレリスに関する研究は依然重要な位置を占めていると考えられる。トレリスは符号を表現する極めて基本的な手段なのである。実際、1980年代後半から1990年代半ばにかけて、多くの研究者がこの問題に取り組んだ。特に、ブロック符号のトレリス構造に関して多くの研究が行われ、ある意味で最適な最小トレリス(minimal trellis)の複雑度について多くが解明された。例えば、トレリスの深さ(depth) $i$ での状態複雑度および枝(edge)複雑度が理論的に求められている。

(3) 一方、上記のブロック符号に比較して、畳込み符号のトレリス複雑度については未だ十分に研究が行われているとは言えない。もちろん、1983年の山田等によるシンドローム形成器のトレリスに基づく最尤復号法の提案、1994年のSidorenko等によるシンドロームトレリスに基づく最尤復号法の複雑度の解析などがあり、また、最小スパン生成行列(minimal-span generator matrix)の方法を畳込み符号に応用したMcEliece等によるトレリス複雑度の解析が知られている。しかし、ブロック符号に比べると十分研究されているとは言えず、不明な点が多々存在している。

(4) 特に、畳込み符号のエラートレリスについては、符号トレリスと密接な関係にあるにもかかわらず、その研究は非常に限られている。

(5) 2000年代に入り、LDPC符号の畳込み符号バージョンである、LDPC畳込み符号(LDPC convolutional codes)に関する研究がかなり行われている。通常、LDPC畳込み符号のメモリ長は大きく、トレリスに基づく復号は原則不可能と考えられている。一方、擬巡回(quasi-cyclic)LDPC符号に関して、Tanner等は、各成分が遅延要素 $D$ の単項式のみで構成される検査行列 $H(D)$ から得られるLDPC畳込み符号を考察している。また、この事実とは独立に、Ariel等は、畳込み符号の検査行列 $H(D)$ に対し、その列(行)が $D^i$ という因子を持つ場合の対応するエラートレリスの状態複雑度について考察している。この内容は、Tanner等が対象としている $H(D)$ から構成されるエラートレリスの構造解析に直ちに利用できると考えられ、従来想定されなかった“トレリスに基づく復号”に関して何らかの知見が得られるのではないかと想像された。

## 2. 研究の目的

(1) 畳込み符号の最小エラートレリスモジュ

ールの構成法を明確化する。

(2) 検査行列(双対符号器) $H(D)$ の性質(basicやminimal-basicという性質)とシンドローム形成器 $H^T(D)$ から構成されるエラートレリスの関係を明確にする。

(3)  $H(D)$ がやや特殊な形をしているとき、例えば、ある列(行)が因子 $D^i$ を持つ場合について、対応するエラートレリスの構造を解明する。具体的には、従来法で得られるエラートレリスに比べて、更に状態数の少ないエラートレリスを用いて元のエラーパスが表現される場合があるかを解明する。

(4) 生成行列 $G(D)$ 、シンドローム形成器 $H^T(D)$ 、検査行列(双対符号器) $H(D)$ 、およびreciprocal dual encoder  $H^{\sim}(D)$ などから構成される最小トレリスモジュールの複雑度が相互にどのように関係しているかを定量的に解析する。

(5) LDPC符号の畳込み符号バージョンである、LDPC畳込み符号(LDPC convolutional codes)について、グラフ(Tanner graph)構造だけでなくトレリス構造の観点からも詳細に解析する。

## 3. 研究の方法

(1) ここでの方法は、1970年代半ばにSchalkwijk等によって初めて提案されたエラートレリスの構成法に準拠するものであり、シンドローム形成器 $H^T(D)$ の実現(adjoint obvious realization)に基づいていることが特徴である。これに対し、Ariel等は検査行列 $H(D)$ から導かれるスカラー検査行列に基づく方法を提案しているが、前者の方がより畳込み符号に適していると考えられる。

(2) 山田等は、シンドローム形成器のトレリスを用いて符号パス(符号語)を表現する方法を与えた。原論文は、符号化率が限定され、符号トレリスの最小トレリスモジュールを構成する手段として記述されているが、非常に重要な結果と思われた。この方法を一般の符号化率へ拡張すると共に、エラートレリスの最小トレリスモジュールを与える手段へ発展させる。

(3) LDPC符号あるいはLDPC畳込み符号の定義は、生成行列 $G(D)$ ではなく、検査行列 $H(D)$ に基づいている。これらの符号は、今まで対応するエラートレリスと関連づけて研究されることはなかったと思われる。しかし $H(D)$ を介していることから、無関係とは思えず、エラートレリス構造との関連を見出すことができれば非常に興味深い。特に、Ariel等は、畳込み符号の検査行列 $H(D)$ に対し、

その列(行)が  $D^i$  という因子を持つ場合の対応するエラートレリスの状態複雑度を考察しているが、Tanner 等が提案している LDPC 畳込み符号の検査行列  $H(D)$  はこのような形をしているため、これを足掛かりに対応するエラートレリスの構造を解析する。

#### 4. 研究成果

(1) 山田等が提案した、シンδροーム形成器のトレリスを用いて符号パス(符号語)を表現する方法は、畳込み符号の最小トレリスモジュールを構成する手段を与えているが、対象とする畳込み符号の符号化率( $r$  と書く)は  $(n-1)/n$  に限定されている。これを一般の  $r=k/n$  へ拡張した。

①一般の  $r=k/n$  の畳込み符号に対するシンδροーム形成器(シンδροームビットが複数個)の実現(回路実現)を行った。

②これを利用して、畳込み符号の最小トレリスモジュールを構成する山田等の方式を一般の  $r=k/n$  へ拡張した。

③  $r=k/n$  へ一般化された山田等の方式と Sidorenko 等により提案されている方式の関係を調べ、両者は基本的に同等であることを示した。

④一般化された山田等の方式は、小さな修正により、畳込み符号の最小エラートレリスモジュールの構成法にもなることを示した。

(2) 畳込み符号のエラートレリス構成法を、検査行列  $H(D)$  のある列(行)が因子  $D^i$  を持つ場合へ拡張した。提案の構成法は、シンδροーム形成器の実現 (adjoint obvious realization) に基づくものであり、Ariel 等によって提案されている、(検査行列  $H(D)$  から導かれる)スカラー検査行列  $H_{\text{scalar}}$  に基づく方法とは異なる。

①  $H(D)$  のある列が因子  $D^i$  を持つ場合、この因子を  $H(D)$  から掃き出すことと、対応するエラー部分系列を  $j$  時間シフトすることは同等であることに注目し、この事実を利用して、 $H(D)$  のある列が因子  $D^i$  を持つ場合、対応するエラー部分系列を  $j$  時間シフトすることにより、より状態数の少ないエラートレリスを用いて元のエラー系列を表現できる場合があることを示した。

また、提案の構成法は、Ariel 等の  $H_{\text{scalar}}$  に基づくエラートレリス構成法と同等の状態数低減効果を与えることを示した。

②  $H(D)$  のある行が因子  $D^i$  を持つ場合も、①と類似の結果が成り立つことを示した。すなわち、対応するシンδροーム部分系列を  $i$  時間シフトすれば、より状態数の少ないエラートレリスを用いて元のエラー系列を表現で

きることを示した。

③  $H(D)$  のある列に意図的に因子  $D^L$  を導入することにより、より状態数の少ないエラートレリスを用いて元のエラー系列を表現できる場合があることを示した。すなわち、 $H(D)$  の列から因子を掃き出すだけでなく、逆に因子を入れ込むことによってもエラートレリスの状態数を低減できる場合があることを示した。

この方法は、上記①と比較した場合、対応するエラー部分系列を逆方向へ  $L$  時間シフトすることに相当する。

(3) Tanner 等が提案する LDPC 畳込み符号では  $H(D)$  の各成分が  $D$  の単項式で表現される。この事実注目し、上記(2)の縮退化法を繰り返し適用して、総拘束長(行次数和)の低減を試みた。その結果、対応する畳込み符号の誤り訂正能力を保存した形で、 $H(D)$  の総拘束長を大幅に低減できることを確認した。この結果は、従来想定されなかった LDPC 畳込み符号の“トレリスに基づく復号”の可能性について示唆を与えている。

(4)  $G(D)$  のある列が単項式因子ではなく、 $(1+D)$  のような多項式因子を含む場合に対し、この因子を  $G(D)$  から掃き出すことにより、元の符号パスをより状態数の少ない符号トレリスに埋め込めることを確認した。また、縮退トレリスの状態数が真に少なくなる場合、1 状態あたり複数本の生残りパスを保存すれば、従来通り最尤復号可能なことを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Masato Tajima, Koji Okino, Takashi Miyagoshi, Error-Trellis Construction for Convolutional Codes Using Shifted Error/Syndrome-Subsequences, to be published in IEICE Trans. Fundamentals, E92-A, 2009, 査読有
- ② Masato Tajima, Koji Okino, Takashi Miyagoshi, Error-Trellis State Complexity of LDPC Convolutional Codes Based on Circulant Matrices, IEICE Technical Report, IT2008-61, pp.109-116, 2009, 査読無
- ③ Masato Tajima, Koji Okino, Takashi Miyagoshi, Minimal Code(Error)-Trellis Construction for Rate- $k/n$  Convolutional Codes:

Extension of  
Yamada-Harashima-Miyakawa's  
Construction, IEICE Trans.  
Fundamentals, E90-A, pp.2629-2634,  
2007, 査読有

〔学会発表〕(計3件)

- ① Masato Tajima, Error-Trellis State Complexity of LDPC Convolutional Codes Based on Circulant Matrices, 電子情報通信学会情報理論研究会, 2009年3月9日, 公立ほこだて未来大学(函館)
- ② 田島正登, Circulant 行列に基づく畳込み符号のエラートレリスの状態複雑度, 第31回情報理論とその応用シンポジウム, 2008年10月10日, 栃木県日光市鬼怒川
- ③ 田島正登, 畳込み符号における符号パスのあるトレリスへの埋め込みとその復号, 第30回情報理論とその応用シンポジウム, 2007年11月28日, 三重県志摩市賢島

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田島 正登 (TAJIMA MASATO)

富山大学・理工学研究部(工学)・教授

研究者番号: 20251879

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者