

平成22年5月29日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19500012

研究課題名（和文） 構成的数学における逆数学の研究

研究課題名（英文） Reverse Mathematics in Constructive Mathematics

研究代表者

石原 哉（ISHIHARA HAJIME）

北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：10211046

研究成果の概要（和文）：本研究は、構成的逆数学のための形式体系の調査・提案・評価・改良を目的として行われた。型概念に基づいた体系、および集合概念に基づいた体系、それぞれに対して様々な原理（例えば、連続性原理）、および位相空間・一様空間の定理を対象に調査を行った。その結果、集合概念に基づいた体系としては、構成的集合論（CZF）およびその部分体系が、有力な候補であることが分かった。また、型概念に基づいた体系としては、単調完備定理を詳細に分析することにより、構成的解析体系（EL）の部分体系を構成的逆数学のための形式体系として提案した。

研究成果の概要（英文）：The project aimed at research, proposal, evaluation, and improvement of formal systems for constructive reverse mathematics. Formal systems based on the notion of a type, and formal systems based on the notion of a set were examined by case studies on principles (such as a continuity principle), and theorems in topological and uniform spaces, respectively. It appeared that the constructive set theory (CZF) and its subsystems, as formal systems based on the notion of a set, work well for our purpose. By carefully examining the monotone completeness theorem, we proposed a subsystem of elementary analysis (EL) as a formal system based on the notion of a type.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：構成的数学

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：数理論理学，数学基礎論，構成的数学，逆数学

1. 研究開始当初の背景

（1）数学における構成的な考え方は、Dedekind や Cantor に代表される抽象的な

概念や証明方法に対するリアクションとして、19世紀の終わりに興ってきた。Brouwer は、通常の論理における原理をも再

考し、後に直観主義論理として形式化される論理に基づいて、数学の再構築を試みた。Markov は、直観主義論理に基づき、さらに扱う数学的対象は計算可能であるという公理を仮定し、Markov の構成的数学を構築した。Brouwer の直観主義数学や Markov の構成的数学では、特殊な公理を仮定しているので、通常の数学（古典的数学）と矛盾する定理も証明できる。

(2) Bishop は、直観主義論理を用いて解析学の基本的な部分を再構築し、現在 Bishop の構成的数学と呼ばれる構成的数学を確立した。Bishop の構成的数学は、可算選択公理を含む関数の存在公理を仮定しているが、特殊な公理を仮定しないため、古典的数学と矛盾する結果は証明できない。さらに、古典的数学、Brouwer の直観主義数学、Markov の構成的数学は、Bishop の構成的数学の拡張となっている。例えば、Brouwer の直観主義数学は、Bishop の構成的数学に連続性の原理とファン定理 (FAN) を公理として加えることにより、得られる。それゆえ、Bishop の構成的数学はもっとも一般的な数学といえる。

(3) 古典的数学の枠組みで、したがって古典論理を用いて、数学の様々な定理を証明するために必要十分な集合の存在公理を明らかにする、Friedman-Simpson の逆数学プログラムがある。うまく集合の存在公理を選ぶと数学的定理とその公理が、基礎となる2階算術の体系で同値になる、逆数学現象が多く確認されている。代表的な集合の存在公理として WKL や ACA が挙げられる。この古典的逆数学における研究は、古典論理に強く依存した研究である。

(4) 80年代の中頃から、Bishop の構成的数学においても、この逆数学現象ともいえる現象が多く確認されてきた。Julian-Richman (1984) は、単位区間上の一樣連続正値関数の下限が正であるためには、FAN が成り立つことが必要十分であることを示した。その後、Mandelkern (1988) が Bolzano-Weierstrass の定理を証明するためには非構成的な論理的原理 LPO が成り立つことが必要十分であることや、Ishihara (1990) が WKL を証明するためには非構成的な論理的原理 LLPO が成り立つことが必要十分であることを示した。また、Ishihara (1991,1992) は、距離空間上の写像の連続性と有界性原理 (BD-N) を中心に様々な原理について論じた。最近の研究としては、Ishihara-Schuster (2004)、Berger-Ishihara (2005)、Ishihara (2005)、Berger-Bridges-Schuster (2006)、Ishihara(2006)などが挙げられる。特に、Ishihara (2005) は、構成的逆数学のための

基礎となる試験的な形式体系を提案し、様々なコンパクト性の、論理的原理と関数の存在公理による、分類を試みた。

2. 研究の目的

(1) Friedman-Simpson の逆数学プログラムは、古典論理を用い、非常に弱い集合の存在公理をもった形式体系上で、どのような集合の存在公理が定理の証明に必要な十分かを明らかにしていくものである。この古典的逆数学は、古典論理を用いているため、

①古典的数学と矛盾する Brouwer の直観主義数学や Markov の構成的数学の定理を扱えない、

②WKL と FAN などの古典論理では同値な原理を区別できない。

また、Bishop の構成的数学における逆数学は、非形式的であり、可算選択公理を含む関数の存在公理を仮定しているので、

①WKL と LLPO など関数の存在公理とそれに含まれる論理的原理を区別できない、

②古典的逆数学プログラムでの結果との関係が明確でない。

(2) 本研究は、これらの問題点を解決するために、直観主義論理に基づき、関数の存在公理を最小限に抑えた、構成的逆数学のための形式体系を、

①構成的数学における逆数学の実践を通して、調査・提案し、

②ケーススタディとメタ数学的な考察を通して、評価・改良することを目指す。

(3) 数学のための形式体系には、型概念に基づいた体系と集合概念に基づいた体系がある。型概念に基づいた体系はメタ数学的に扱いやすく、集合概念に基づいた体系は数学的概念が表現しやすい。研究期間内に以下に挙げる具体的目標の実現を目指した。

①構成的数学のための型概念に基づいた形式体系、集合概念に基づいた形式体系、および古典的逆数学のための形式体系の、構成的逆数学の実践を通じた、調査。

②構成的逆数学のための、直観主義論理に基づいた、関数の存在公理を最小限に抑えた、形式体系の提案。

③提案した形式体系の、構成的逆数学のケーススタディを通じた、評価・改良。具体的には、提案した体系で数学的定理の証明を試み、定理を証明するために必要十分な論理的原理および関数の存在公理を明確にする。

④提案した形式体系の、メタ数学的な考察を通じた、評価・改良。例えば、提案した形式体系と古典的逆数学の形式体系の間の自然な変換の構成。

3. 研究の方法

(1) 構成的逆数学のための型概念に基づいた形式体系として、構成的算術体系 (HA)、構成的解析体系 (EL) を中心に、以下に挙げる数学的定理、論理的原理、および関数の存在公理に対して構成的逆数学を実践することにより、調査を行った。

- ① Brouwer の連続性原理
- ② Brouwer のファン定理
- ③ De Morgan の法則
- ④ 可算選択公理
- ⑤ 従属選択公理
- ⑥ Baire の定理
- ⑦ Kronecker の密度定理
- ⑧ 有界性原理

(2) 構成的逆数学のための集合概念に基づいた形式体系として、構成的集合論 (CZF) を中心に、以下に挙げる問題に関する数学的定理、論理原理、および集合の存在公理に対して構成的逆数学を実践することにより、調査を行った。

- ① Neighbourhood space と Apartness space 間の圏論的關係
- ② Neighbourhood space と Function space 間の圏論的關係
- ③ uniform space の完備化
- ④ 線形位相空間における一様有界性定理

(3) 上記に挙げた構成的逆数学の実践をとおして、型概念に基づく構成的解析体系 (EL) の部分体系を、構成的逆数学のための、直観主義論理に基づく、関数の存在公理を最小限に抑えた、形式体系として提案した。

(4) 上記 (3) で提案した形式体系に対してメタ数学的な考察を行うとともに、それを用いて、以下に挙げる数学的定理および数学的概念に対して、構成的逆数学のケーススタディを行った。

- ① 単調完備定理
- ② Cauchy 列と弱 Cauchy 列

4. 研究成果

(1) 構成的逆数学の実践を通じた形式体系の調査として、Brouwer の連続性原理 (WC-N) を制限した形の原理 (WC-N') と、Baire の定理 (BT) を制限した形の定理 (BT')、および有界性の原理 (BD-N) について、それぞれの間の関係を明らかにすることを目的として調査を行った。その結果、WC-N' は BT' と \neg LPO を導き、BT' は BD-N を導くこと、および BD-N と \neg LPO は WC-N' を導くことを示した。したがって、WC-N'、BT' と \neg LPO、BD-N と \neg LPO はすべて互いに同値になることが明らかになった。また、この結果は構成的な解

析体系 (EL) あるいは有限型算術体系 (HA^o) で容易に形式化できることが分かった。研究成果は、Hajime Ishihara and Peter Schuster, A continuity principle, a version of Baire's theorem and a boundedness theorem, J. Symbolic Logic 73 (2008), 1354-1360、として出版した。

(2) 構成的逆数学の実践を通じた形式体系の調査の一環として、Kronecker の密度定理について調査を行った。Bishop の構成的数学において Kronecker の密度定理を証明するためには、無理数をいかなる有理数とも離れている (bounded away) 実数と定義する必要がある。事実、無理数を有理数でないものと定義すれば、Kronecker の密度定理は Markov の原理 (MP) と同値になる。有理数であること、あるいは無理数であることを、実数に対する述語と捉え、構成的逆数学の枠組みでそれらの述語を体系的に分類した。研究成果は、Hajime Ishihara and Peter Schuster, Kronecker's density theorem and irrational numbers in constructive reverse mathematics, Math. Semesterber 57 (2010), 57-72、として出版した。

(3) 構成的逆数学のための集合概念に基づいた形式体系の、構成的数学の実践を通じた、調査の1つとして、neighbourhood space と Apartness space 間の圏論的關係を中心に調査を行った。Topological および uniform quasi-apartness space の概念を導入し、topological quasi-apartness space のなす圏と neighbourhood space のなす圏、および uniform quasi-apartness space のなす圏と uniform space のなす圏の間に、それぞれ随伴関手が存在することを示した。研究結果は構成的集合論 (CZF) にべき集合の公理を加えた体系で形式化できることが分かった。また、quasi-apartness space に対して、集合表現という概念を導入することにより、べき集合の公理の使用を避けることに関して、考察を加えた。研究成果は、Hajime Ishihara, Two subcategories of apartness spaces, Ann. Pure Appl. Logic, in press、として出版が確定している。

(4) 構成的逆数学のための集合概念に基づいた形式体系の、構成的数学の実践を通じた調査の一環として、neighbourhood space と function space 間の圏論敵關係を中心に調査を行った。Pre-function space の概念と、それに対して Φ 閉および Ψ 閉という概念を導入し、neighbourhood space のなす圏と Φ 閉な pre-function space のなす圏、および uniform space のなす圏と Ψ 閉な pre-function space のなす圏の間に、それぞ

れ随伴関手が存在することを示した。研究結果は、CZF に相対化従属選択公理 (RDC) を加えた体系で形式化できることが分かった。研究成果は、Hajime Ishihara, *Categorical aspects of function spaces*, 2009, submitted、として投稿中である。

(5) 構成的逆数学の実践を通じた形式体系の調査の一環として、WKL, FAN, De Morgan の法則、従属選択公理 (DC) に関して研究を行った。非構成的原理 (omniscience principles) を、2分木の文脈において体系的に扱い、WKL と FAN について考察を行った。また、WKL の LLPO とある種の従属選択公理への分解を、再論した。この研究成果は、Josef Berger, Hajime Ishihara and Peter Schuster, *The Weak Koenig lemma, Brouwer's fan theorem, de Morgan's law, and dependent choice*, 2009, submitted、として投稿中である。

(6) 構成的逆数学の実践を通じた形式体系の調査の1つとして、可算選択公理の対偶命題とある種の二重否定の除去について研究を行った。その結果、可算選択公理の対偶命題は Σ^0_2 論理式に対する二重否定の除去と同値であることを示した。研究結果は、構成的算術体系 (HA)、あるいは構成的解析体系 (EL) に Church's thesis (CT) を加えた体系で形式化できることが分かった。この研究成果は、Hajime Ishihara and Peter Schuster, *On the contrapositive of countable choice*, 2009, submitted、として投稿中である。

(7) 構成的逆数学のための集合概念に基づいた形式体系の、構成的数学の実践を通じた調査の一環として、線形位相空間における一様有界性定理に関して研究を行った。その結果、一般的な一様有界性定理は有界性の原理 (BD-N) と同値であることが明らかになった。この結果により、一様有界性定理は、古典数学、Brouwer の直観主義数学、Markov の構成的数学では成り立つが、Bishop の構成的数学では証明できないことが分かった。また、研究結果は、CZF に RDC を加えた体系で形式化できることが分かった。この研究成果は、Hajime Ishihara, *The uniform boundedness theorem and a boundedness principle*, 2010, submitted、として投稿中である。

(8) 構成的逆数学のための集合概念に基づいた形式体系の、構成的数学の実践を通じた調査の1つとして、uniform space の完備化に関して研究を行った。古典数学では uniform space の完備化は、Cauchy フィルター全体の集合により与えられるが、Cauchy フィルター全体の集合を構成するには、べき集

合の公理が必要である。研究の結果、べき集合の公理を持たない CZF において、uniform space の完備化が構成できることが明らかになった。研究結果は CZF のみで形式化でき、構成的逆数学のための集合概念に基づいた形式体系として CZF が有力であることが分かった。この研究成果は、Josef Berger, Hajime Ishihara, Erik Palmgren and Peter Schuster, *A predicative completion of a uniform space*, 2010, submitted、として投稿中である。

(9) 構成的逆数学のための形式体系の提案とそのケーススタディによる評価・改良として、単調完備定理 (monotone completeness theorem) の研究を行った。単調完備定理は古典的逆数学において ACA と同値であり、可算選択公理を仮定する構成的数学では LPO と同値である。一方、古典的逆数学では ACA と同値である実数の完備性は、可算選択公理を仮定する構成的数学では証明できる。この古典的逆数学と構成的逆数学の対応関係の崩れを詳細に分析し、そのための形式体系を提案した。分析の結果、弱 Cauchy 性の概念を導入することにより、

- ① 有界単調数列が弱 Cauchy 列であることとある種の (古典論理では証明できる) 論理的原理が同値であること、
- ② 弱 Cauchy 列が Cauchy 列であることとある種の (Bishop の構成的数学では仮定されている) 可算選択公理が同値であること、
- ③ Cauchy 列が収束することは、可算選択公理を仮定しないで構成的数学で証明できること、

を明らかにした。これらの結果は、構成的解析体系 (EL) の部分体系で形式化でき、その部分体系が構成的逆数学の形式体系として適していることが分かった。この研究成果は、Hajime Ishihara, *The monotone completeness theorem in constructive reverse mathematics*, 2010, in preparation、として投稿準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Hajime Ishihara, Two subcategories of apartness space, *Ann. Pure Appl. Logic*, in press, 2010, 査読有
- ② Hajime Ishihara and Peter Schuster, Kronecker's density theorem and irrational numbers in constructive reverse mathematics, *Math. Semesterber*, 57, 57-72, 2010, 査読有
- ③ Hajime Ishihara and Peter Schuster, A

continuity principle, a version of Baire's theorem and a boundedness principle, J. Symbolic Logic, 73, 1354-1360, 2008, 査読有

(H19→H20～ : 連携研究者)

(3) 連携研究者 ()
研究者番号 :

[学会発表] (計 7 件)

- ① Hajime Ishihara, A boundedness principle in constructive reverse mathematics, Continuity, Computability, Constructivity: From Logic to Algorithms, 2009.6.17, Köln, Germany
- ② Hajime Ishihara, Continuous morphisms in constructive topological spaces, Leeds Symposium on Proof Theory and Constructivism, 2009.6.15, Leeds, UK
- ③ Hajime Ishihara, On a set generation scheme in constructive set theory, Advances in Constructive Topology and Logical Foundations, 2008.10.09, Padova, Italy
- ④ Hajime Ishihara, A continuity principle, a version of Baire's theorem and a boundedness principle, Conference on Abelian Groups and on Constructive Mathematics, 2008.5.10, Boca Raton, USA
- ⑤ Yohji Akama, ω -rules and learnability, Computability in Europe 2007, 2007.6.21, Siena, Italy
- ⑥ Hajime Ishihara, Unique existence and computability in constructive reverse mathematics, Computability in Europe 2007, 2007.6.20, Siena, Italy
- ⑦ Hajime Ishihara, Neighbourhood and quasi-apartness spaces, and separation properties, 3rd Workshop on Formal Topology, 2007.5.12, Padova, Italy

[その他]

ホームページ等

<http://www.jaist.ac.jp/~ishihara>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石原 哉 (ISHIHARA HAJIME)

北陸先端科学技術大学院大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号 : 10211046

(2) 研究分担者

赤間 陽二 (AKAMA YOHJI)

東北大学大学院・理学研究科・准教授

研究者番号 : 30272454