

平成22年 6月10日現在

研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19500719  
 研究課題名（和文） 小学校算数科における比例的推論の教授・学習に関する実証的研究  
 研究課題名（英文） A Study of Proportional Reasoning Instruction on Mathematics for Elementary School  
 研究代表者  
 田端 輝彦 (TABATA TERUHIKO)  
 宮城教育大学・教育学部・教授  
 研究者番号：80344745

研究成果の概要（和文）：数学者と数学教育研究者と小学校現職教師による研究会を定期的開催し、比例的推論の教授実験プログラムを構成するとともに、これに基づき、教授実験を3年間、二つの小学校で継続的に行った。

教授実験の結果、市川啓氏の実践からは、小学校3学年と4学年の乗除法場面で、比例的推論の進展において加法的見方から乗法的見方への過渡期的変容をとらえることができた。高橋丈夫氏の実践からは、小学校4学年、5学年の乗除法ならびに割合の場面で比例的推論の進展の助けとして数直線が有効であることが明らかとなった。

研究成果の概要（英文）：(1) A study meeting was held regularly by mathematicians, researchers of mathematics education, and incumbent teachers of mathematics for elementary schools, in which an instruction experiment program for proportional reasoning was constructed.

(2) Based on this program, an instruction experiment was carried out continuously for three years at two elementary schools.

The two results of the instruction experiments are as follows.

In the instruction experiment of Kei Ichikawa, a transitional change from an addition strategy to a multiple strategy was observed of third and fourth graders as their proportional reasoning developed.

In the instruction experiment of Takeo Takahashi, it became clear that number line is effective in helping the development of the proportional reasoning of fourth and fifth graders.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成19年度	1,200,000	360,000	1,560,000
平成20年度	1,100,000	330,000	1,430,000
平成21年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学，科学教育

キーワード：比例的推論，教授実験，カリキュラム

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 比例的推論の教授・学習の研究は、2000年前後から注目されるようになってきた領域である。たとえば、2004年に山口・岩崎は、「一般化分岐モデルに基づく分数除の教授・学習に関する研究」のテーマのもと、日本数学教育学会の第86巻数学教育学論究にその論文が掲載された。この研究では、小学校算数と中学校数学を接続するキーワードとして比例的推論に着目している。その後、2006年に中村光一により「小学校中学年での子どもの比例的推論の進展に関する研究」、ならびに日野圭子により「一人の児童の比例的推論の変容過程にみる表記の扱い」が第39回日本数学教育学会論文発表会にて発表された。中村の研究は小学校3，4年児，日野の研究が小学校5，6年児を対象としていた。山口・岩崎がどちらかといえば指導内容からの教授実験であったのに対して，中村，日野の研究は，児童の比例的推論の進展を学習過程から分析しようとした。

(2) 研究代表者ならびに本研究グループのメンバーは、2003年から4年間、特定領域研究の一つとして比例的推論の適時性について、数学者と数学教育研究者とで研究を進めてきていた。研究開始当時、筆者らの研究は、まだ教授実験は試行的段階であり、比例的推論を中心として、小学校第3，4学年から中学校、高等学校までの指導内容の再検討がまとめられた段階であった。

本研究グループでは、比例的推論の進展は、1単位時間や単元レベルでの教授実験では検証できないと考えていた。数年間の追跡調査ならびに教授実験を行うことによって、カリキュラムの柱の一つとして比例関係に着目し、その前提のもとでの数学的推論の進展を考察したいと考えていた。そこで、本科研費により、第1弾として小学校第4学年から6学年での児童の学習過程を数年間追跡する研究を行う必要があると考えたのである。

### 2. 研究の目的

本研究の究極的な目的は、算数・数学学習における比例的推論の役割を教授・学習の両側面から分析し、比例関係を中心概念にすえ、かつその適時性に配慮した小，中，高等学校段階での一貫カリキュラムを構築するとともに、それを実証的に行うことにある。

比例的推論とは、数学的には乗法構造、数量関係としては比例関係を内在しないし前提として仮定してよいと認められる場面で行われる数学的推論である。

小学校第2学年で乗法が導入された後、提示された数量に比例関係が内在する乗除法の場面が第3学年で指導される。数量関係としての比例の指導は、正の整数の範囲が小学校第6学年、それが負の数の範囲へと拡張されるのが中学校第1学年であり、正比例・反比例として位置づけられる。変化の割合が一定である（差分的には比例関係）ことから、グラフが直線となると位置づけられる一次関数の指導が第2学年であり、二乗に比例する二次関数が第3学年である。図形領域では、平行線と比や相似の学習に関連して中学校第3学年から指導され、高等学校の図形と方程式や三角比へと発展する。

このように、場面やその背景にある数学的構造に着目すると、比例関係は小学校から高等学校までの長期間にわたる数学学習の根幹に位置するものであり、これらの学習を進めていく上で比例的推論は、数学的推論の方法の一つとして重要な役割を果たすことになる。

本研究では、小学校の実践経験のある数学教育研究者を募り、数学者とともに使用学校算数科における比例的推論の教授・学習過程の実証的研究を行うことを目的としたい。その第1弾として、小学校第4学年から3年間、同じ児童を追跡することを通して、比例的推論の進展について分析したい。

### 3. 研究の方法

小学校段階の比例的推論の教授・学習過程を実証的に研究するため、本研究では、以下の三つの研究課題を設定し、それらを解決することを目指した。

現職小学校教師を募り、現職小学校教師を募り、教授実験の勉強会を立ち上げ、教授実験を行う。

本研究では、3年間同じ児童を追跡調査する。小学校教師の特殊性から、同一の研究協力者による学級の追跡はできない。そこで、同一の学校で継続的に子どもを追跡できる環境を考え、東京都内の国立大学附属小学校と埼玉県内の公立小学校に協力を依頼し、その学校内の教諭に飛び込み授業の形で実践することにする。

#### 4. 研究成果

前述したように、本研究では、埼玉県内の公立小学校と東京都内の国立大学附属小学校で3年間、同じ児童の比例的推論の進展の教授実験と追跡調査を行った。以下では、各学年ごとに分け、それぞれの実践の概要と成果をまとめたい。

##### (1) 小学校第4学年の比例的推論の進展

この学年では、整数の加減乗除の意味とその計算方法についての学習が行われる。これまでの指導では、たとえば、「1mで80円のリボンがあります。このリボン3mでは何円でしょいか」という問題で指導されていた。これに対して、本研究では、「3mが12gの針金があります。この針金、12mの重さは何gでしょいか」という問題で指導することを考えた。

この意図は、1あたり量を示した問題では、この場面に内在する比例関係を顕在化することなく答えが出てしまう。本来ならば、リボンの問題は、長さが3倍になったからといって代金も3倍になるとは限らない。算数の学習では、このことは暗黙のうちに仮定されていることである。しかし針金の問題場面は、一般的に小学校6学年で指導することが多いこともあって、長さや重さに比例関係があることを知らない場合が多い。暗黙のうちに認めて考えている児童には、そのようになっていることの説明が求められる。比例関係を顕在化した後でも、1あたり量が示されていないので、乗除の演算を行う理由が求められる。

さらに我々が行った数値では、以下の二つの方法が考えられる。

一つが帰一法と呼ばれるもので、 $(12 \div 3) \times 12$  と考える。最初の除法は1mあたりの重さを求めたものであり、このとき長さが三分の一だから重さも三分の一になると考えている。次の乗法は長さが12倍となったので重さも12倍となるとして比例的推論を行って求めたものである。

もう一つが倍比例と呼ばれるもので、 $12 \times (12 \div 3)$  と考える。最初の除法は3mをもとに長さが4倍となっていることを求め、これによって長さが4倍なので重さも4倍になると比例的推論を行っているものである。

これら二つの方法では、いずれも比例的推論を行っており、比例関係を顕在化した後に、この推論を遂行する過程において乗除法を用いている。さらにこれらの推論の説明の道具として二本の数直線図を用いて指導を行った。

埼玉県の公立学校では、この学習以前の小学校3学年の実践も行っている。この実践か

らは、加法的見方から乗法的見方への過渡期的変容をとらえることができ、その契機として比例関係を見抜くことの必要性が明らかとなった。

一方で東京都内の国立大学附属小学校では、実践授業の終わりの学習感想からは、数直線のよさにふれながら、評価問題では比例関係を見抜いてしまった後には数直線図を活用しない実態が明らかとなった。

以上の実践の構想段階をまとめたものが論文①であり、実践の結果をまとめたものが論文②である。

##### (2) 小学校第5学年の比例的推論の進展

この学年では、小数の乗除法と割合の指導において比例的推論の教授実験が可能であると考えた。

前者は、4学年の乗除法の数値を変更しただけで可能である。すなわち、「5mで600gの針金があります。この針金14mでは何gとなりますか」である。帰一法では、 $600 \div 5$  から1mは120gとなって既習の問題となるが倍比例では、 $14 \div 5$  から2.8倍となり、常数が小数の未習の乗法となる。

場面は異なるが数値はほぼ同じとして、埼玉と東京で引き続き、実験授業を行った。ほぼ同様な結果が得られたが、どちらも倍の意味が小数倍となったとたんに、児童の意味理解が深化していかないことがわかった。この原因は、小数倍の意味を計算の結果から理解することが多く、いくつ分の意味の倍からもとにする量を1とみてその～にあたる大きさと拡張できていないことがあげられる。図表示を含め、この段階での意味指導は、今後の課題として残されている。

さらにこの学年では、割合の意味指導に比例的推論を取り入れる実践を行った。バスケットのシュートのうまさを比較する場面では、5回投げて4回入った人と4回投げて3回入った人とを比較する。この際に、 $4 \div 5$  と  $3 \div 4$  をして比較してよい根拠に比例関係があり、これを認めた後に比例定数としての割合を比較する。

このように比較してよいことを知らない児童は、5回投げて4回入った人は、10回投げて8回入る人と同じうまさであることを認めることから比例関係を顕在化させることを意図した。平成10年告示の学習指導要領では、単位あたりの大きさを第6学年にした関係で、本来の児童は比例関係を健在化する学習に慣れてない。しかし、実践対象とした児童は、第4学年から比例関係を健在化してきているので、比例的推論により、これらの学習が成立している様相をとらえることができた。

この実践の結果は、論文③でまとめたが、比例関係を顕在化しつつ演算決定の指導を

行う実践が、構想段階から実証的に段階に移ったものと考えている。

### (3) 小学校第6学年の比例的推論の進展

この学年では、分数の乗除法の学習において比例的推論の教授実験が可能であると考えた。

分数の除法では、除数の逆数をかければよいことを理解できるようにすることが指導目標である。この理解を助けるものとして数直線があげられるが、数直線を比例関係のモデルとして理解している児童は、これを活用して比例的推論を行うことによって、逆数をかければよいことが理解できるはずである。

この実践については、学校内の事情により、東京都内の国立大学附属小学校でしか実践ができなかった。したがって、比較対象とするものが少なく、実証性については慎重にならざるを得ないが、授業後の学習感想からは、伴って変化する二つの数量をとらえ、演算決定の根拠に比例関係をあげることが自然と行われるまでになっていたことは評価してよいと考える。

分数の乗除法の実践については、現在論文としてまとめている最中であり、今年度内に学会にて発表する予定である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 田端輝彦 (2009), 割合の意味指導における比例関係の顕在化に関する授業の考察—「同じ割合」をつくる活動を通して—, 第42回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp. 217-222 査読あり
- ② 田端輝彦 (2008), 整数の乘法における比例関係の顕在化に関する授業の考察—1あたり量を示さない問題を数直線を書く活動を通して—, 第41回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp. 339-344 査読あり
- ③ 田端輝彦 (2007), 整数の乘法における比例関係の顕在化に関する一考察—割合(比)の三用法の類型と1あたり量を示さない問題の分析を中心として—, 第40回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp. 325-330 査読あり

[学会発表] (計3件)

- ① 田端輝彦, 割合の意味指導における比例関係の顕在化に関する授業の考察—「同じ割合」をつくる活動を通して—, 日本数学教育学会主催, 第42回数学教育論文発表会,

静岡大学, 2009年11月7日

- ② 田端輝彦, 整数の乘法における比例関係の顕在化に関する授業の考察—1あたり量を示さない問題を数直線を書く活動を通して—, 日本数学教育学会主催, 第41回数学教育論文発表会, 筑波大学, 2008年11月1日
- ③ 田端輝彦, 整数の乘法における比例関係の顕在化に関する一考察—割合(比)の三用法の類型と1あたり量を示さない問題の分析を中心として—, 日本数学教育学会主催, 第40回数学教育論文発表会, 東京理科大学, 2007年11月3日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田端 輝彦 (TABATA TERUHIKO)  
宮城教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 80344745

### (2) 研究分担者

萬 伸介 (YOROZU SHINSUKE)  
宮城教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 40019849  
(H19→H20: 連携研究者)  
山田春樹 (YAMADA HARUKI)  
宮城教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 00092578  
(H19→H20: 連携研究者)  
藤井齊亮 (FUGII TOSHIKIRA)  
東京学芸大学・教育学部・教授  
研究者番号: 60199289  
(H19→H20: 連携研究者)  
中村享史 (NAKAMURA TAKASHI)  
山梨大学・教育人間科学部・教授  
研究者番号: 70303394  
(H19→H20: 連携研究者)  
中野博之 (NAKANO HIROSHI)  
弘前大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 30400120  
(H19→H20: 連携研究者)

### (3) 研究協力者

高橋丈夫 (TAKAHASHI TAKRO)  
東京学芸大学附属小金井小学校  
市川啓 (ICHIKAWA KEI)  
ふじみ野市立西原小学校  
早川健 (HAYAKAYA KEN)  
甲府市立石田小学校