

## 様式C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 6 月 9 日現在

研究種目： 基盤研究（C）  
研究期間： 2007～2008  
課題番号： 19530178  
研究課題名（和文） 構造をモデル化しない分散構造のベイズ推定  
研究課題名（英文）  
Bayesian Estimation of Unknown Regression Error Heteroscedasticity  
研究代表者 斯波 恒正（SHIBA TSUNEMASA）  
一橋大学大学院経済学研究科・教授  
研究者番号 90187386

### 研究成果の概要：

回帰モデルにおける誤差項の不均一分散を推定・検定する分野の既存の文献は、例外なく分散構造をモデル化してきた。これに対し本研究では、分散構造を全くモデル化をしないでノンパラメトリックに推定する方法を開発した。本研究では主に二つの方法で、この困難な問題を解決した。推定すべき不均一分散パラメータは標本の大きさに従って増加し、通常なら識別不能であるが、これを回帰モデルの中で解決した。次に標本理論で有名なホワイトの一致性を持つ回帰係数の推定分散を利用して、ベイズ計量経済学の枠組みでマルコフ連鎖モンテカルロ法を設計し、これが実際に使えることを示し良好なパフォーマンスを実証例でも確認した。

### 交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：経済統計学

キーワード： 計量経済学、ベイズ、マルコフ連鎖モンテカルロ法、分散不均一性

### 1. 研究開始当初の背景

計量経済モデルにおいて従属変数の分散、従ってその誤差項の分散が観測値毎に均一ではないことが頻繁に観察される。例えば、いくつかの企業の利潤を説明するクロスセクション回帰モデルでは、企業の規模に応じて利潤は大きく異なるであろうか

ら、誤差項の分散は均一ではないと思われる。また時系列回帰モデルにおいても一企業の利潤率は、景気の影響を受けて大いに変動するので、その誤差項の分散も変動するであろう。

このような現象は「不均一分散」と呼ばれ、不均一分散下での回帰係数の推定や検

定、不均一分散性そのものの検定等、これまで多くの研究が行われてきた。それらの研究においては不均一な分散の推定に焦点が当たること（例えば回帰係数の GLS (Generalized Least Squares) 推定等) があるが、そのときには不均一な分散の構造のモデル化が必要であった。例えば先ほどの企業利潤のクロスセクション回帰では、誤差項の分散を企業規模の関数としてモデル化することがある。時系列回帰では、ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity) モデル等が不均一分散モデルの代表例であろう。時系列回帰では、特に金融工学において派生証券の評価に原資産価格のボラティリティが必要なので、回帰係数よりも不均一な分散そのものの推定に焦点が当てられることが多い。

不均一分散の推定にモデルを使う方法は、上に挙げたように、様々なものが提案されているが、モデルを全く使わない方法は（我々の知る限り）提案されていない。本研究では、不均一分散の構造をモデル化することなくそれを推定する方法を提案することとした。この、不均一分散の構造をモデル化しないという点が、我々の推定法の特徴である。そして、その推定を、被説明変数の予測精度の向上などに応用することとした。

## 2. 研究の目的

以上の「研究の背景」に鑑み、本研究において以下の点を、その目的とした：不均一な分散の推定法を提案し、提案する推定法を、被説明変数の予測精度の向上などに応用すること。この研究目的のために次の2点、(1)と(2)からの接近を試みた。

(1) ベイズ的枠組みの利用：我々の目指す推定法の特徴は分散のモデル化を必要としないことだが、これは分散に一切の制約を課さないということではない。モデル化というきつい制約ではなく、緩い制約は推定に役立つと考えられる。例えば、“分散”であるので正であるとか、異常値でない限り他の分散に比べて分散が一つだけ莫大になることはない、といった緩い制約であり、有用だろう。これらの制約は実質上、分散に上下限があることを意味する。これらの制約はベイズ的枠組みの中で先験的情報・事前情報として取り込むのが自然である。分散の上下限はいわゆる事前分布としてモデルに取り込めるし、通常の方法では導出が困難な分散の周辺事後分布も

MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 法を使えば導けると考えられる。こうしたことが実際に機能するかを探ることも研究目的の一つである。

(2) White の HCCM (Heteroscedasticity Consistent Covariance Matrix) の利用：上でベイズ的枠組みを利用すればモデル化をせずに分散の推定が可能だろうと述べたが、予想される大きな危険がある。モデル化をしないということは、分散パラメータの数が標本の大きさと同じだけあることを意味するので、標本理論的には識別不能となることが直感的にも明らかである。この危険性については、MCMC 法を行う際の分散の候補分布が上手く導けないという問題として顕在化することからも我々は認識してきた。そこで、分散の候補分布の導出に White の HCCM が利用できるかどうか、その可能性を探ることを本研究の目的の一つとした。よく知られているように、HCCM は、誤差項分散の構造をモデル化せずに回帰係数の推定量の分散を推定するものである。我々のアイデアは分散構造をモデル化しないまま抽出できる情報を HCCM より得て、これを候補分布の導出に利用しようというものである。この点は本研究の大きな特徴である。

## 3. 研究の方法

「研究目的」欄で述べた2点について具体的な研究方法を説明する。

(1) ベイズ的枠組みを構築する方法：ベイズ的枠組みを利用する際にポイントとなるのは、分散の上下限という事前分布をどう設定するかである。設定の仕方によっては恣意的な事前分布となりかねないのでこの点は慎重に行う必要がある。我々は、誤差項の分散に、著名な Greene の教科書等で採用される標本の大きさで決まる規準化を施し、この規準化の下で非常に範囲の広い上下限を与えること考えた。この範囲の広さと基準化によって、分散の上下限の設定における恣意性をかなり排除できたと思われる。このように設定した事前分布と尤度から事後分布を導き、興味のあるパラメータである誤差項分散の周辺事後分布をシミュレートする MCMC 法を構築した。

(2) HCCM の利用方法：誤差項分散の周辺事後分布を MCMC でシミュレートする際に、その候補分布が上手く導出できないという問題が生じる。White の HCCM が候補分布の作成にどう役立つかについて

は、次のように考えた。まず、HCCM に  $\text{vech}$  オペレーター（対称行列の下三角部分を列ベクトル化するオペレーター）を作用させることで、不均一な分散をパラメーターとする線形回帰モデルを導き、最小 2 乗法で不均一な分散を直接推定する。このような線形回帰モデルが確かに導け、最小 2 乗法が適応可能であることは、我々が既に明らかにしたところである。次に、こうして得た分散の推定量をある分布に埋め込んで候補分布とする。具体的には、HCCM から得た分散推定量を期待値とした正規分布を候補分布にするなど様々なことが考えられる。

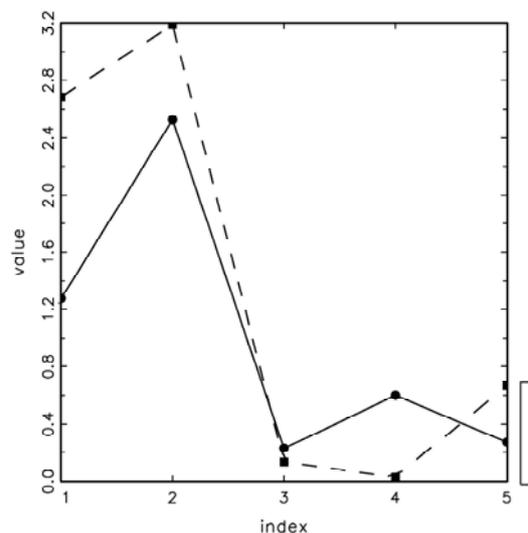
#### 4. 研究の成果

「研究成果の概要」で述べたが、回帰モデルにおける誤差項の不均一分散を推定・検定する分野の既存の文献は、例外なく分散構造をモデル化してきた。これに対し本研究では、分散構造を全くモデル化しないでノンパラメトリックに推定する方法を開発した。本研究では主に二つの方法で、この困難な問題を解決した。

まず、推定すべき不均一分散パラメーターの数は標本の大きさに従って増加するので、通常なら識別不能である。我々は回帰式の全変数に直交する変数を人為的に生成することでこの問題を解決した。遡ればこのアイデアは、「部分的一般化最小二乗法 (PGLS)」(雨宮(1983)が提案した) で使用されたものである。しかし、このままでは推定された不均一分散パラメーターのパフォーマンスが悪く実用に耐えない。そこで、妥当な事前情報を使用するベイズ計量経済学の枠組み特にマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) の中で、この問題点を解決した。

このために、標本理論で有名なホワイトの一致性を持つ回帰係数の推定分散 (HCCM) からの情報を利用した MCMC を設計した。数値例では生成した不均一分散を各々のベイズ的事後平均が良好にトラックすることを示した。下の図は標本の大きさ 50 で与えた真の不均一分散のうち最初の 5 個 (実線で結ばれている) を 5 個の限界事後分布を基に計算した事後平均 (破線で示した) が追う様子を示している。なお、最初の 5 個のみ図示しているのは、単に見やすさを考慮したためで論文では、50 個の図を "Figure 1" に示した。

(<http://gcoe.ier.hit-u.ac.jp/research/discussion/2008/gd08-051.html>)。



最後に我々が提唱したベイズ手法が実際に使えることを示すために、日本の製薬業界を含む企業群の株価収益率の不均一分散を推定した。小型株効果などの分野でも知られているように、一般に企業規模が大きければ株価収益率の変動 (分散) は小さいとされる。このことを我々は上掲論文の中の図で実証した。

科学研究費による支援期間の間に以上の成果を学会や研究会で発表し、また DP の形で公表してきた。今後は、本研究で残された幾つかの課題を解決し、計量経済学の専門ジャーナルに投稿していきたい。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)  
 (1) Kurozumi, E., Chigira, H. and Yamamoto, T., Equivalence of Two Expressions of the Impact Matrix, *Econometric Theory*, vol.21, No.4, pp.870-875. 査読あり

(2) Chigira, H., A Test of Serial Independence of Deviations from Cointegrating Relations,

Economics Letters, vol.92, No.1, pp.52-57. 査読あり

(3) Hiroaki Chigira and Tsunemasa Shiba, September 2006. Bayesian Estimation of Unknown Heteroscedastic Variances. Hi-Stat Discussion Paper Series No.185, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University. 査読なし

(4) 千木良 弘朗, 斯波 恒正, 2006年. 構造を仮定しない不均一分散の推定. 一橋経済学, 第1巻, 第1号, 1-13. 査読なし

(5) Hiroaki Chigira and Tsunemasa Shiba, 10/2007, 02/2008. Bayesian Estimation of Unknown Regression Error Heteroscedasticity. Hi-Stat Discussion Paper Series No.221, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University. 査読なし

(6) Hiroaki Chigira and Tsunemasa Shiba, 3/2009. Bayesian Estimation of Unknown Regression Error Heteroscedasticity. Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series #51, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University. 査読なし

[学会発表] (計 1 件)

Hiroaki Chigira and Tsunemasa Shiba, Far Eastern Econometric Society Meeting, July17, 2008, Singapore Management University, Singapore.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他] 特になし

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

斯波 恒正 (SHIBA TSUNEMASA)  
一橋大学大学院経済学研究科・教授  
研究者番号 : 90187386

(2) 研究分担者

千木良 弘朗 (CHIGIRA HIROAKI)  
東北大学大学院経済学研究科・准教授  
研究者番号 : 30447122

(3) 連携研究者 なし