

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19530288

研究課題名（和文）跳躍拡散過程の下における永久イスラエリ・オプションの評価

研究課題名（英文）The Pricing of Perpetual Israeli Options under Jump Diffusion Processes

研究代表者

董 晶輝（DONG JING HUI）

東洋大学・経営学部・准教授

研究者番号：80408955

研究成果の概要：原資産価格過程が幾何ブラウン運動にジャンプを加えた跳躍拡散過程に従う場合、通常の永久アメリカン・オプションに対応する永久イスラエリ・オプションの買い手と売り手の権利行使限界を求めるとともに、オプションの価格式を導出する。応用として、為替レート連動型貸借契約と2重買い取り請求権付き優先株の評価について検討し、本研究の成果が新しい金融資産の設計とその価格付けへの応用の可能性を示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：経済学・財政学・金融論

キーワード：イスラエリ・オプション、権利行使限界、跳躍拡散過程、2重指数分布、2重アーラン分布、最適停止時刻

1. 研究開始当初の背景

オプションの買い手（保有者）だけが権利行使できる通常のオプションに対し、Kifer(2000)がオプションの売り手（発行者）も権利を行使することができるイスラエリ・オプション（Israeli Options）あるいはゲーム・オプション（Game Options）と呼ばれるオプション契約を考えた。売り手の権利行使は、その時点で買い手が権利行使した場合に得られるペイオフに一定の金額をオ

プションの保有者に支払う。買い手と売り手のいずれかが権利行使することにより、オプション契約が終了するというものである。原資産の価格過程を幾何ブラウン運動として、いくつか既存の研究で、通常のアメリカン・オプションに対応するイスラエリ・オプションの権利行使限界、価格式および性質を理論的に解明してきた。しかし、実務的な観点から、多くの実証研究で示されたように、市場で取引されている資産の価格過程は純粋の

幾何ブラウン運動に従うものではなく、ジャンプが含まれる場合が多い。通常のオプションについては、原資産価格過程が跳躍拡散過程に従うものとして、いくつかの研究成果が発表されているが、イスラエリ・オプションについての研究は見当たらない。この研究では、原資産の価格過程が跳躍拡散過程に従う場合、通常の永久アメリカン・オプションに対応するイスラエリ・オプションの評価について研究を行う。

2. 研究の目的

原資産の価格過程にジャンプが含まれる場合、原資産の価格がオプションの権利行使限界を飛び越す可能性を持つので、これがオプションの価格を求めるとを困難にしている。イスラエリ・オプションの場合、原資産の価格が買い手と売り手の双方の3つ権利行使限界を飛び越す可能性を持つ。ここでは、買い手と売り手の双方の3つ権利行使限界を同時に求めなければならず、オプションの価格と権利行使限界を求める条件式はさらに複雑になる。2000年以降、ジャンプを含む確率過程としてレヴィ過程でのオプション理論が広く議論されるようになってきた。この研究では、レヴィ過程として、上方と下方の双方向のジャンプがあり、ジャンプの確率分布がアーラン分布である場合を考え、いつでも権利が行使できる永久イスラエリ・オプションについて検討する。まず、取り扱いが比較的容易で、株価モデルとしてしばしば使用される2重指数過程での永久イスラエリ・オプションについて、オプションの価格を導出する。確率過程のパラメータの変化に対し、オプションの買い手と売り手の行動がどのように変わるかをみるため、両者の権利行使の閾値について感度分析を行う。次に、応用として、為替レート連動型貸借契約などを検討する。最後に、2重指数過程の一般化として、ジャンプの確率分布がアーラン型の場合の価格を導出する。

3. 研究の方法

ジャンプの分布が指数分布の場合、通常の永久アメリカン・オプションについて、いくつかの先行研究で権利行使限界が示されている。これらの先行研究では一つの停止境界を求めているが、この研究では、イスラエリ・オプションの性質から売り手と買い手の権利行使限界を合わせて3つの停止境界を同時に求めなければならない。ここでは、原資産の価格過程にジャンプが含まれる場合の派生資産の価格が満たす微分方程式を導出し、微分方程式の一般解を導出する。イスラエリ・オプションの権利行使限界を求めるた

めの第一ステップとして、停止境界が両側にある場合の条件式を導出する。この結果を基にし、3つの停止境界のあるイスラエリ・オプションの権利行使限界を求めるための条件式を導出する。原資産の価格過程にジャンプが含まれるため、権利行使限界を求める条件式は高次の連立方程式となる。権利行使限界を求めるには数値的に高次の連立方程式を解く必要がある。また、ジャンプの分布がアーラン型の場合、高次の連立方程式の変数には複素数が含まれる。ここでは、効率的に数値解を求める方法についても研究する。これらの問題をクリアしてから、跳躍拡散過程での永久イスラエリ・オプションの売り手と買い手の権利行使限界の性質を数値的に分析し、幾何ブラウン運動でのこれらの性質と比較し、原資産の価格過程のジャンプの成分を考慮することの理論的と実務的な意味を示す。

4. 研究成果

この研究では、原資産価格過程が跳躍拡散過程(jump-diffusion process)に従う場合、通常のアメリカン・オプションに対応するイスラエリ・オプションの買い手と売り手の権利行使限界を求めるとともに、オプションの価格を導出した。通常のアメリカン・オプションについては、片側(買い手)の停止限界を求めればよいが、本研究で扱うイスラエリ・オプションはオプションの買い手と売り手の双方の権利行使限界を同時に求めなければならない。原資産価格過程が幾何ブラウン運動に従う場合には、売り手の権利行使の領域は権利行使価格からイン・ザ・マネーのある値までの範囲となり、この値が求めなければならない売り手の権利行使限界であり、これを買い手の権利行使限界と同時に求めればよい。原資産価格過程が跳躍拡散過程に従う場合には、売り手の権利行使領域が権利行使価格の両側に広げられるので、売り手の権利行使限界を求めるには両側の停止限界と買い手の権利行使限界と合わせて3つの権利行使限界を同時求めなければならない。そこで、この研究では、まず、両側の停止境界を求めるところから始めることにし、この問題を解決に成功した。この結果をコーポレート・ファイナンスでの投資決定問題に応用し、跳躍拡散過程での参入退出問題について研究し、参入と退出の閾値とプロジェクトの評価式を導出した。本研究の1つ重要な副産物として、コーポレート・ファイナンス関連の学会で発表し、論文「跳躍拡散過程での有限回参入退出モデル」が関連の学会誌に採用された。両側の停止問題の結果を踏まえて、売り手の権利行使限界と買い手の権利行使限界の3つの停止限界を同時に求める条件式を導出す

る。

まず、ジャンプの分布が2重指数過程の場合について、永久イスラエリ・オプションの買い手と売り手の権利行使の閾値と価格式を導出した。それをもとに、数値的にオプションの買い手と売り手の権利行使の閾値の感度分析を行い、ジャンプの効果を明らかにした。結果を簡潔にまとめると、次のようになる。

(1) コール・オプション

ボラティリティが増加する場合、買い手と売り手はともに自分にとってよりよい状態の発生を期待して、権利行使を遅らせることになる。売り手の買い戻しプレミアムの変化についても同様の結果である。また、売り手の買い戻しプレミアムの値が増加するにつれ、売り手の権利行使領域は権利行使価格の1点に縮小し、さらに増加すると権利行使領域は消滅する。その他のパラメータの値の変化は株価の期待収益率の変化に繋がるものであり、株価の期待収益率を増加させるようなパラメータの変化は買い手の権利行使を遅らせ、売り手の権利行使を早める。無リスク金利の増加は株価の期待収益率の減少と同じ効果を持つ。

(2) プット・オプション

ボラティリティ、売り手の買い戻しプレミアム、無リスク金利の変化はコール・オプションの場合と同じ効果を持つ。その他のパラメータはコール・オプションの場合と逆の効果を持つ。

このモデルの応用として、為替レート連動型貸借契約と2重買い取り請求権付き優先株の評価について検討した。前者はコーポレート・ファイナンスでの応用として、輸出企業の銀行からの借り入れの返済が為替レート変化に連動する貸借契約を考えた。輸出企業(契約の売り手側)は円高になる場合(業績の悪いとき)に為替レートに比例して返済し、返済額が少なくなる。ただし、返済を申し出たときには、為替レートに比例した返済額に一定のプレミアムを加えて銀行に返済する。銀行(契約の買い手側)は円安(業績のよい)のときに、為替レートに比例して返済を請求し、返済額が多くなる。企業も銀行も、都合のよいときにいつでも返済あるは返済を請求できることとする。このような為替レート連動型貸借契約はイスラエリ・オプションと同一の式から結果が得られるものであるが、為替レートの変動が幾何ブラウン運動に従うとする場合には売り手の権利行使領域の上限だけが意味を持つことになる。これに対し、為替レートの変動が2重指数過程のジャンプがあると考える場合では売り手の権利行使領域の下限も意味を持つことになる。

後者については、ここで考える優先株は、優先株主が普通株への転換と企業に優先株

を買い取ることを請求できる2つの権利がつくこと、さらに企業は優先株を買い戻すことができる権利がつく場合を考える。このため、イスラエリ・オプションの評価式とはいくらか異なる式になるが、類似の方法で結果が得られた。さらに、数値的に優先株の株価を求めるとともに優先株主と企業の権利行使閾値および優先株と普通株の株価について感度分析を行った。分析の結論は次の2つの効果としてまとめることができる。

(1) 優先株買い戻し権の効果

企業に買い戻し権がない場合と比べると、普通株への転換水準はかなり低下する。このことから、早い時点での普通株への転換が期待される。また、企業に買い戻し権がない場合に比較して、買い戻し権の存在は優先株の価格をかなり引き下げる。これは優先株主に買い取り請求権を与えることにより生じる優先株価格の上昇を緩和することになる。

(2) ジャンプの効果

一般に優先株が発行される時点では企業価値は買い戻し水準より高い位置にある。幾何ブラウン運動では企業価値は連続的に変動するので、企業価値が買い戻し水準に到達すると、そこで買い戻しが行われ、買い戻し水準以下の閾値は実質的な意味は有しない。ジャンプがある場合、企業価値が買い戻し水準を飛び越す可能性があるため、優先株主と企業のすべての権利行使閾値が意味を持つようになる。

これらの分析により、本研究の成果が新しい金融資産の設計とその価格付けへの応用の可能性を示した。

続いて、2重指数過程を含むより一般的な確率過程として、ジャンプの分布が2重アーラン型の場合について検討し、この場合での買い手と売り手の権利行使限界を求め、永久イスラエリ・オプションの価格式を示した。ここで求めた価格式は複素数を含む高次の連立方程式であるため、実務での利用を考え、汎用の計算ソフトでこの種の複素数を含む高次の連立方程式を数値的に解く方法を研究し、権利行使限界とオプションの価格を数値的に求めることに成功した。また、この計算手法は跳躍拡散過程でのリアル・オプション・モデルを数値的に解く際にも役に立つ。これを研究ノート「2重アーラン過程リアル・オプション・モデルでの複素数計算」にまとめ、学会誌に投稿し、現在審査中である。

以上の研究成果を論文「跳躍拡散過程での永久コーラブル・オプション」にまとめた。論文をまとめる際に、金融資産としてより一般的に理解しやすいため、イスラエリ・オプションをコーラブル・オプションと呼ぶことにした。論文をファイナンス関連の学会誌に投稿し、現在審査中である

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

- (1) 董晶輝、飯原慶雄、「跳躍拡散過程での有限回参入退出モデル」、『経営財務研究』、第 28 巻、pp.2 - 14、2008 年。 査読有

[学会発表](計 3 件)

- (1) 董晶輝、飯原慶雄、「2重買い取り請求権付優先株」、日本ファイナンス学会第 17 回大会、2009 年 5 月 10 日、青山学院大学。
- (2) 董晶輝、飯原慶雄、「跳躍拡散過程での永久イスラエリ・オプション」、日本経営数学会第 30 回全国大会、2008 年 6 月 1 日、駿河台大学。
- (3) 董晶輝、飯原慶雄、「跳躍拡散過程での参入退出問題」、日本経営財務研究学会第 31 回全国大会、2007 年 10 月 7 日、立命館大学。

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

6. 研究組織

(1)研究代表者

董 晶輝 (DONG JING HUI)

東洋大学・経営学部・准教授

研究者番号： 80408955

(2)研究分担者

(3)連携研究者