様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年５月２５日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2008
課題番号：19530799
研究課題名（和文）　代数学習の質的深化を促す数学的活動の連鎖と質的深化を実感させる内省の役割
研究課題名（英文）Mathematical Activities’ Chain and Role of Introspection urged and realized to profound Insight and Meaning about Algebraic Learning

研究代表者
宮田　由雅（MIYATA YOSHIMASA）
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：50022207

研究成果の概要：
本研究では，代数に関わる数学的活動で，学習者が今まで学んだことを活かして新たなことがらを洞察する学習過程と，今まで学んだことがら等に新たな意味生成をする学習過程を分析しながら，学習者の認識の変容や数学観の形成について考察を行った。また，代数学習における認識のゆらぎ，ゆらぎの自覚とのりこえ，認識の深化の実感など，中学校から高校への接続期における代数学習の内省の役割について，実証的な考察を行った。

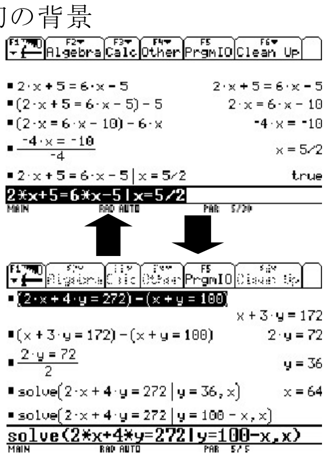
交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	3,000,000	900,000	3,900,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
総　計	3,700,000	1,110,000	4,810,000

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：　（分科）教育学　（細目）教科教育学
キーワード：代数学習，質的深化，数学的活動，内省，洞察，意味形成，認識，学習過程

１．研究開始当初の背景



数学学習の質的深化は，洞察と新たな意味形成の２つの相の学習の連鎖によって行われる。
例えば，右図は，数式処理電卓を用いて１次方程式や連立方程式を解いたものである。等式の同値変形に注意して１次方程式を解くと「両辺に同じ操作を施す」という等式の性質の認識が深まる。さらに，１次方程式を解く過程をふりかえり連立方程式を解くことを探求する中で「A＝B，C＝DならばA－C＝B－D」が成り立つことを洞察したり，等式の性質に対する新たな意味形成を図ることができる。数式処理電卓を用いて方程式を解く活動を通して，等式の性質の拡がりや式の同値変形によって方程式を解くことの意味が形成されている。さらに，学習者の中に洞察や新たな意味形成を促しているのは，学習者が自分の学習過程を内省する行為である。こうした背景により，洞察と新たな意味形

成の２つの相の学習の連鎖，学習活動にみられる内省の役割を探求していきたいと考えた。

２．研究の目的

本研究の目的は，次の２点を考察することである。

(1)　代数学習の質的深化を促す数学的活動の事例開発を行う。また，数学的活動の連鎖による教授単元の開発を，中学校から高等学校への接続期に焦点をあてて行う。

(2)　代数の考えを育み，代数の考えを活かす数学的活動（代数的活動）で，学習者による内省の活動がいかに学習の質的深化を実感させるのかについて，理論的な考察を進めるとともに，実践された教授単元での学習者の学習状況等から実証的な考察を行う。

３．研究の方法

上記の研究の目的に向けて，次の３つの方法により，考察を進める。

(1) 代数学習の質的深化を促す数学的活動の事例開発に向けて，静岡県内で行われた数学授業，共同研究者が過去に国立大学附属中学校で行った数学授業を分析するとともに，中等教育段階の海外の数学教科書にみられる工夫された題材や知見代数学そのものへの学習の深化を意識した数学的活動の事例開発を行う。その際に，小中高12年間を４－４－４の区分でとらえ，静岡県版カリキュラム算数・数学科の「核となることがら」の発想を活かした事例開発を行う。

(2) 数学的活動の連鎖による教授単元の開発を，中学校から高等学校への接続期に焦点をあてて行い，複数の中学校にて，授業実践を行う。また，その授業の様子や学習者の筆記物を電子データ化し，質的な分析を中心に行う。

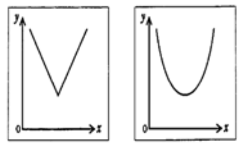
(3) 代数的活動や代数的活動における内省の役割について，最近の数学教育研究の知見を分析するとともに，上記(2)における質的なデータから，代数学習における内省の活動が果たす役割を実証的に考察する。

４．研究の成果

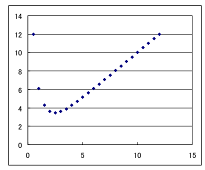
(1) 代数学習の質的深化を促す数学的活動について

数学学習における質的深化を「学習者が今までに学んだことを整理し，活かして新たなことがらを洞察する過程と，新たに学んだこととの対比のもとに，今まで学んだことがらなどに新たな意味を生成する過程との繰り返しにより行われる，学習者の認識の変容と学習活動を通した数学観の形成」ととらえた。このとらえを踏まえ，実際に行われた中学校数学の授業をもとに，代数学習の質的深化を促す数学的活動の事例について考察を行った。

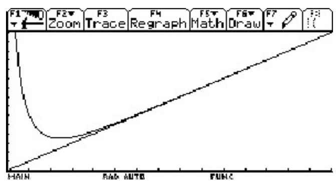
事例の１つ目は，反比例の学習活動の中で営まれた「語りきれないことがらの存在を意識し，そのことがらに迫ること」である。この学習活動は，面積一定の長方形に成り立つ２変量の関係を調べていく中で，反比例の関係だけでなく，数学的な美しさを有する数量関係の存在を意識し，直観的，帰納的な段階からその数量関係に迫るものである。面積一定の長方形で，横の長さと縦の長さとは反比例の関係にあるが，横の長さと対角線の長さは反比例の関係にない。横の長さの変化に対する対角線の長さの変化について，多くの学習者は，V字やU字のような左右対称のグラフ（概形）を想定する。



ところが，面積一定の長方形をいくつかかき，そのデータをもとにグラフ化すると右のようになる。予想したグラフと，データを踏まえたグラフとのずれに，生徒は，驚き，意外性，興味を強く抱く。さらに「このグラフには何か規則性や特徴があるぞ，何だろう。」という問いを抱きながら，「このグラフは，右にいけばいくほど直線になりそうだ。その直線は比例 $y = x$ のグラフではないか。」などの仮説を立てていく。授業の中では，実際に $y = x$ のグラフをかいたり，x 軸と y 軸が出会うように折り込み，その折れ目の直線と対角線のグラフを比較するという動きがみられた。

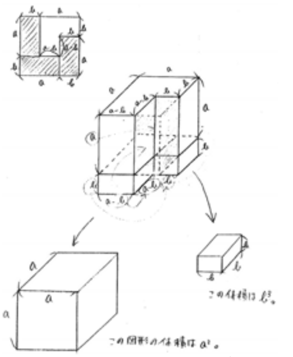


面積一定の長方形に関して，横の長さと対角線の長さの関係を式表現し，グラフ化すると右図のようになる。式変形などをした結果から，生徒の抱いた仮説の妥当性も示すこともできる。面積一定の長方形の周の長さ，縦と横の長さの差など，学習者にとって身近にある数量の関係の中に，学習意欲を抱かせるものが多く含まれている。



事例の２つ目は，式を読むことを重視して，式の同値変形をとらえることである。例えば，「二乗の差は和と差の積である」ことを理解するために，面積図を用いて，

長方形を動かしてできる２つの正方形に着目させたり，２つの台形を連結させて１つの長方形をつくるといった活動が行われる。この活動の類推により，立方の和a^3+b^3の因数分解を立体モデルで導き出すことができる。右図は，中学３年の数学授業で登場した考えであり，「Ｌ字型の六角柱から，体積の等積変形を通して，２つの立方体をつくり出す」という発想に基づいている。ここでは，Ｌ字型の立体の底面の面積が$(a+b)^2-3ab$，Ｌ字型の立体の高さが$a+b$と表される。多項式の因数分解を「図で考える」という姿勢が高められることにより，２次式から３次式への洞察がなされると共に，等積変形と式の同値変形との対比のもとに，式変形に関する認識の深まりがみられている。



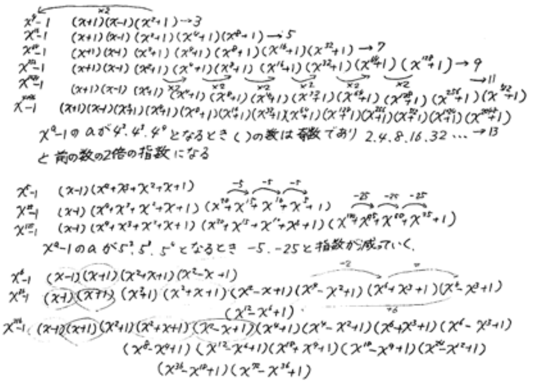
(2) 数学的活動の連鎖による代数の教授単元とその実証的な考察

数学的活動の連鎖による代数の教授単元として，数式処理電卓を活用して自然数の性質やx^n-1の形の式の因数分解に関する性質を探求する学習活動と，有理数からの接近や有理数との異同を実感する単元「平方根」の学習活動を設計し，その実践について質的な分析を中心に行った。いずれも，中学校から高等学校への接続期に焦点をあてて行われた実践である。

数式処理電卓を活用して自然数の性質を探求する学習活動では，123123や851851など同じ数が連続してできる自然数の性質を調べること，同じ数が連続してできる数を素因数分解して得られる性質を一般化していくこと，1111など１が連続してできる自然数の特徴を，素因数分解して得られた因数の分布から発見したり検証することなどが行われた。また，x^n-1の形の式の因数分解に関する性質を探求する学習活動では，x^2-1を因数分解する過程をふりかえり，紙と鉛筆による方法でx^3-1やx^4-1を因数分解した式を導くこと，３つの式x^2-1，x^3-1，x^4-1を因数分解してできる式をもとに，x^7-1までを因数分解してできる式を予想したり，数式処理電卓を用いた結果と予想を比較すること，数式処理電卓を用いて$x^{14}-1$くらいまでの因数分解を行い，気づいたことを明文化すること，x^n-1の因数分解を進めながら指数ｎの値を大きくしたときに成り立ちそうな特徴を見いだし，議論することなどが行われた。

これらの学習のうち，例えばx^n-1の因数分解の性質を探求する学習では「$(x-1)$が因数分解すると表れる，$(x-1)$と$(x+1+\bigcirc)$が表れる，因数分解した後の指数が２倍になると因数分解する前の文字につく指数が２倍になる，(　　)の中がｘと１だけでできている，$(x-1)$でくくると$x^{\bullet}$の $\bullet-1$から始まって$(x^{\bullet-1}+x^{\bullet-2}+x^{\bullet-3}+\cdots+1)$という形になる，$x^2$，$x^4$ など偶数で変わるものと，x^3，x^5 など奇数で変わるものではそれぞれ決まった増え方があるのかもしれない」の意見が授業の始めの段階で共有される。ここで「因数分解した後の指数が２倍になると因数分解する前の文字がつく指数が２倍になる」とは，例えば，x^4-1とx^8-1と，各々の式を因数分解してできる因数x^2+1とx^4+1との関係などを表す。

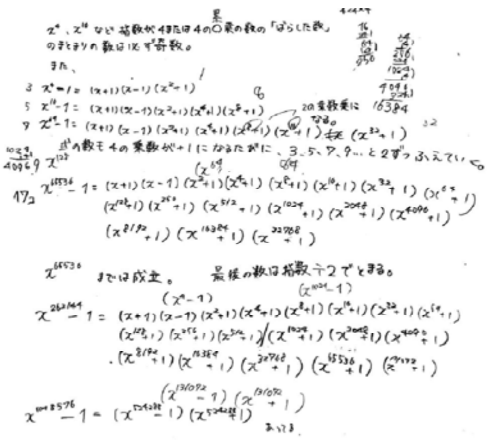
続いて，x^n-1の指数ｎがある条件を満たす自然数の場合，x^n-1の因数分解にはどのような共通点がみられるか，という点に議論が進む。例えば，次の生徒Ａの記述にみられるように，指数ｎが４の累乗の数の場合での，因数分解された式での因数の個数と指数ｎとの関係を考え，続いて指数ｎが５や６の累乗の数の場合での性質を探求したものがある。



生徒Ａは，「x^a-1のａが4^2，4^3，4^4となるときの(　)の数は奇数であり，２，４，８，16，32と前の数の２倍の指数になる」のように，因数の個数とともに，因数の中で最大の次数をもつ多項式どうしを比較しその式の次数が次々と２倍になっていることを指摘する。続いて，指数ｎが５の累乗の数の場合，$x-1$以外の因数は５つの項の多項式から生成されることを知ると共に，それぞれの因数の指数の変化の仕方を指摘する。例えば，$x^{125}-1$を因数分解して得られる$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x^{100}+x^{75}+x^{25}+1)$について，それぞれの因

数を形成する多項式の指数が同じ数ずつ減少し，減少する数が５の累乗の数になっていることを指摘する。さらに，指数ｎが６の累乗の数の場合をもとに，指数ｎが偶数の場合，$x-1$と$x+1$を２つの因数として共通にもつことや，$x^{36}-1$や$x^{216}-1$の因数どうしの関係を，因数（多項式）にみられる指数に着目して導こうとしている。

生徒Ｂは，次の記述にみられるように，x^n-1の因数分解について，指数ｎが累乗の数になる場合を調べながら，因数の個数，多項式の項の数で因数をみる，多項式の項の指数に着目して因数どうしの関係をみる，指数ｎと因数にみられる指数との関係をみる，など式の形や式の次数に着目した探求を行っている。



例えば，生徒Ｂはx^n-1の指数ｎが４の累乗の数の場合，因数として$x-1$，$x^{\square}+1$の形をもった式が得られること，$x^{\square}+1$の□には２の累乗の数が入ることを指摘する。さらに，$x^{\square}+1$の形の多項式（因数）のうち，最大の次数をもつ式は指数ｎの半分になっていることを，かなり大きな指数においても確認している。

これらの生徒の探求に例示されるように，x^n-1の因数分解の性質について，因数の個数と指数ｎとの関係，因数どうしに成り立つ関係の探求が行われていた。また，x^n-1の因数分解について発見した規則性について,美しさや驚きを感じたり，当初掲げた仮説が反例によって覆されたり，反例を包摂する性質が導かれる過程への強い知的好奇心を抱く者もいた。

x^n-1の因数分解の性質を探求する学習では，x^n-1の因数分解の性質を洞察するとともに，多項式を因数分解することについて，生徒の認識がゆらぎ，そのゆらぎをのりこえて新たな意味を形成することもみられた。この行為は，x^4-1の因数分解を生徒が振り返る場面などに顕著に表れる。一斉授業の中では「因数分解は因数の積，できるだけやれるところまでやりきる，因数として細かくできるところまで，ここのx^2-1をやれるところまでやるということでした。」と授業者が強調し，x^4-1が$(x^2+1)(x+1)(x-1)$と因数分解できることが確認されている。しかし，生徒は因数分解について多様な意味づけをしていること，因数分解の定義が漠たる状態であるときに他者の考えがx^4-1の因数分解に対する見方をゆさぶることなどがみられた。その一方で，因数分解とは何かの議論が進んだり，因数分解をする行為の意味を具体例でふりかえることにより，生徒が認識のゆらぎを自覚し，それをのりこえていく様子がみられた。x^n-1の因数分解に関する考察をふまえて，改めて「因数分解とは何か」についての意味生成がなされていた。

有理数からの接近や有理数との異同を実感する単元「平方根」の学習は，有理数からの平方根への様々な近似の仕方を比較すること，有理数どうしの計算と平方根どうしの計算の異同を比較対照し，議論を重ねることなどの学習活動から構成される。

単元「平方根」の中で営まれた様々な学習活動に関する詳細な考察は，現在も継続して行っている。単元「平方根」の学習活動においても，x^n-1の因数分解の学習活動と同様に，洞察と新たな意味生成の循環による学習の系列や，認識のゆらぎと深化の様相がみられる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① 宮田由雅，両角達男「円分多項式とガロア理論」，静岡大学教育学部研究報告自然科学篇，第59号，pp.1-9，2009，査読有

② 両角達男「帰納的に正しいと認めた数の性質や視覚的なイメージに関連づけながら，正の数・負の数の性質やその意味を考える」，教育科学数学教育，第617号，pp.91-96，2009，査読無

③ 宮田由雅，両角達男「x^n-1の因数分解の学習へのいくつかの所見」，静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要，第15号，pp.1-6，2008，査読有

④ 両角達男「CASを活用したx^n-1の因数分解に関する代数的活動」，静岡大学教育学部研究報告教科教育学篇，第39号，pp.69-84，2008，査読有
http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/bitstream/10297/2398/1/080701001.pdf

⑤ 両角達男，横田川文浩「因数分解に関する生徒の認識のゆらぎと深化－CASを活用した代数的活動を通して－」，日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集，pp.363-368，2008，査読有
⑥ 両角達男「既に学んだことがらと関連づけながら，数学的な事象に対して新たな意味の形成をする」，教育科学数学教育，第614号，pp.91-96，2008，査読無
⑦ 両角達男「語りきれないことがらの存在を意識し，そのことがらに迫る」，教育科学数学教育，第611号，pp.92-97，2008，査読無
⑧ 両角達男「問い続ける姿勢を高めながら，その行為をふりかえる」，教育科学数学教育，第607号，pp.84-89，2008，査読無
⑨ 両角達男，横田川文浩「因数分解の学習の質的深化を促す代数的活動－CASと紙と鉛筆による方法との調和に着目して－」，日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会論文集，pp.337-342，2007，査読有
⑩ 両角達男「文字式を活用して，ことがらの意味理解を深める」，教育科学数学教育，第600号，pp.81-85，2007，査読無

〔学会発表〕（計２件）
① 両角達男，横田川文浩「因数分解に関する生徒の認識のゆらぎと深化－CASを活用した代数的活動を通して－」，日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会，2008.11.2，筑波大学
② 両角達男，横田川文浩「因数分解の学習の質的深化を促す代数的活動－CASと紙と鉛筆による方法との調和に着目して－」，日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会，2007.11.3，東京理科大学

６．研究組織
(1)研究代表者
宮田　由雅(MIYATA YOSHIMASA)
静岡大学・教育学部・教授
研究者番号：50022207
(2)研究分担者
両角　達男(MOROZUMI TATSUO)
上越教育大学・大学院学校教育研究科・准教授
研究者番号：50324322
(3)連携研究者
なし