

平成 22 年 5 月 1 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540004

研究課題名（和文） 計算機による散在型単純群のモジュラー表現解析

研究課題名（英文） Modular representation analysis of sporadic finite simple groups by computers

研究代表者

脇 克志（WAKI KATSUSHI）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：30250591

研究成果の概要（和文）：

散在型単純群  $J_4$  の極大部分群の既約 Brauer 指標の計算を Fong-Reynolds の定理などを適用することで、すべての奇素数  $p$  について決定した。この結果を基に  $p=3$  の場合について、主ブロック以外の既約 Brauer 指標をほぼすべて決定した。この既約 Brauer 指標の値を使い、散在型単純群  $J_4$  の Brauer 予想に関する肯定的な計算が行われた。更に、 $p=11$  の場合について、主ブロックの射影指標の計算を進めた。

研究成果の概要（英文）：

Irreducible Brauer characters of maximal subgroups of the sporadic simple group  $J_4$  are calculated by Fong-Reynolds's theorem on characteristic of all odd primes. With this results, we can determine the almost irreducible characters of the sporadic simple group  $J_4$  which is not belonged in the principal blocks. These irreducible Brauer characters of  $J_4$  are used to prove that the Brauer conjecture for  $J_4$  is in the affirmative. Moreover the calculation of projective characters in the principal block is also stated.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	700,000 円	210,000 円	910,000 円
2008年度	700,000 円	210,000 円	910,000 円
2009年度	500,000 円	150,000 円	650,000 円
年度			
年度			
総計	1,900,000 円	570,000 円	2,470,000 円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限群、分解行列、モジュラー表現論、散在型単純群

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) 既約通常指標は、内積による直交関係を持ち、既約性の判定もこの内積から簡単に求めることが出来ます。これに対し、Brauer 指標には、既約性を確かめる直接的な公式が存在しません。表現論の一般論から、通常既約指標の定義域を  $p$  元の共役類に制限して考えると、通常既約指標は、正の整数を係数とする既約Brauer 指標の一次結合となります。この係数を集めた行列を分解行列と呼びます。つまり、既約通常指標がBrauer指標として、どのように既約分解しているかを表しているのが、分解行列となります。分解行列は、扱いやすい通常表現と、解析が難しいモジュラー表現の橋渡しとなります。
- (2) 有限群の表現論では、1990 年に示された Broufle 予想が未解決な最も重要な問題と考えられています。M. Broufle, P. Fong, E. Harris, T. Holm, B. Keller, S. Különig, S. Koshitani, N. Kunugi, M. Linckelmann, A. Marcus, T. Okuyama, L. Puig, J. Rickard, R. Rouquier, Y. Usami, A. Watanabe, A. Zimmermann といった世界中の多くの研究者が取り組んでいますが、まだ反例は見つかっておらず、もちろん証明もされていません。

## 2. 研究の目的

- (1) 有限群の表現論でもっとも重要となっている Broufle 予想を解く上で不可欠であるモジュラー表現の構造解析を、計算機を用いて行っていきます。いままでの発表論文からも分かる通り、計算機による結果が導き出されることにより、その後に計算機に頼らない証明も導かれて行きます。このことは、計算機による証明が

代数的な証明のためにも不可欠であることを示しています。

- (2) 更に得られた結果は、論文として発表されるだけでなく世界的データベースとしてホームページ上でこの分野を研究している全ての人々に公開されます。更に、本研究の中で開発されたプログラムは、代数解析ソフトウェア GAP[3] のパッケージの一部としてモジュラー表現の解析のために多方面で利用されていきます。

## 3. 研究の方法

本研究では、モジュラー表現を以下の手順で解析します。計算機は、主に C-言語のプログラムと代数解析ソフトウェア GAP の実行に利用します。

- (1) 有限群  $G$  が与えられたとき、まず計算機上でもっとも扱いやすい置換群に変換する。
- (2) 置換から自然に得られる置換行列から、有限体  $k$  上のモジュラー表現  $R$  を構成する。
- (3) C-言語プログラム MeatAxe (R. A. Parker, 1984) により、 $R$  を既約モジュラー表現に分解する。
- (4) モジュラー表現の像となる  $k$  上の行列で構成される  $k$ -代数の巾等元を使って、同等の構造を持つより次元の小さい  $k$ -代数を構成して、置換表現の既約成分から得られていない既約モジュラー表現をテンサー積を使って構成する。
- (5)  $G$  の極大部分群  $H$  の既約モジュラー表現  $S$  を構成して、 $S$  の誘導表現の直和因子から  $G$  の直既約な表現の構造を解析する。
- (6) 有限群自体が大きく、極大部分群との間

の指数も大きい場合置換表現や誘導表現からではモジュラー表現を構成できない場合は、本研究代表者とO. Michler によって2003 年に開発したC-言語のプログラム Amalgamation を使い部分群のモジュラー表現の張り合わせによる表現の構成を行う。

- (7) 表現の次元が大きくて直接モジュラー表現を構成できない場合は、通常指標か Brauer指標を計算するアルゴリズム MOC を基に本研究代表者によって GAP 上で実装されたプログラムを使って既約 Brauer 指標を調べる。
- (8) 部分群の1 次の表現から誘導されたモジュラー表現の直和因子は、Trivial source と呼ばれる。この直既約モジュラー表現には、一意に対応する通常指標が存在し、その内積の計算からこの直既約モジュラー表現の階層構造を決める。
- (9) 行列演算を多用する本研究の計算をより高速にするため、研究分担者の宮本泉氏との研究協力を通して並列計算の技術を使ったプログラム開発をスタートさせる。

#### 4 . 研究成果

- (1) 散在型単純群  $J_4$  の極大部分群の既約 Brauer 指標の計算を Fong-Reynolds の定理などを適用することで、すべての奇素数  $p$  について決定した。これにより、本研究の目標としていた  $p=3, 11$  の場合に留まらず、すべての奇素数に対する既約 Brauer 指標の計算を考えることも可能となった。
- (2) この結果を基にまず、 $p=3$  の場合について、主ブロック以外の既約 Brauer 指標をほぼすべて決定した。この Brauer 指標を利用した散在型単純群  $J_4$  の Broue 予想に関する肯定的な計算も行われ、越谷氏、功刀氏との共著の論文として出版さ

れた。特に、今回の結果では、計算機による射影表現の指標計算が大変重要であり、これらを代数解析ソフトウェア GAP 上の実行ソフトとして、開発したプログラムにより、計算している。

- (3) 連携研究者の宮本氏からは、置換群の計算アルゴリズムについての研究を進めていただき、その研究結果は、平成 20 年度に論文として掲載された。
- (4) 更に、 $p=11$  の場合について、主ブロックの射影指標の計算を進めた。以前手動計算によって得られた計算内容について、F. Noeske が実装した GAP プログラムを改良して利用することで、検証作業が行われた。これにより、GAP プログラムの実行性能も高めることが出来た。

#### 5 . 主な発表論文等

( 研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線 )

[ 雑誌論文 ] ( 計 6 件 )

K.Waki, *On the decomposition numbers of  $J_4$* , Journal of Algebra 321 (2009) 2171-2186 査読有

M.Harada, K.Waki, *New extremal formally self-dual even codes of length 30*, Advances in Mathematics of Communications 3 (2009) 311-316 査読有

I.Miyamoto, *A Construction of Designs from  $PSL(2, q)$  and  $PGL(2, q)$ ,  $q \equiv 1 \pmod{6}$ , on  $q+2$  Points*, Proceedings of Algorithmic Algebraic Combinatorics and Groebner Bases (2009) 279-284 査読有

I. Miyamoto, *A Combinatorial Approach to Doubly Transitive Permutation Groups*, Discrete Mathematics 308

( H19 H20 : 連携研究者 )

(2008) 3073-3081 査読有

S.Koshitani, N.Kunugi, K.Waki, *Broue abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group  $J_4$* , Journal of Pure and Applied Algebra 212 (2008)

1438-1456 査読有

I.Miyamoto, *A Computation of Some Multiply Homogeneous Super-schemes from Transitive Permutation Groups*, Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations (2007) 293-298 査読有

[学会発表](計4件)

脇克志, On the decomposition numbers of  $J_4$ , 研究集会 代数的組合せ論および関連する群と代数, 2009年11月18日, 信州大学

脇克志, About Decomposition Numbers of  $J_4$ , 第41回環論および表現論シンポジウム, 2008年9月7日, 静岡大学

脇克志, GAPによる既約 Brauer 指標の計算, 代数学と計算 2007, 2007年12月4日, 首都大学

脇克志,  $J_4$ の分解行列について, 有限群草津セミナー, 2007年8月4日, 草津セミナーハウス

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

脇 克志 (WAKI KATSUSHI)

山形大学・理学部・教授

研究者番号 : 30250591

### (2) 研究分担者

宮本 泉 (MIYAMOTO IZUMI)

山梨大学・医学工学総合研究部・教授

研究者番号 : 60126654