様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月１９日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０００７
研究課題名（和文）　モチーフの数論的性質の研究

研究課題名（英文）　study of arithmetic properties of motives

研究代表者
木村　健一郎（KIMURA KENICHIRO）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師
研究者番号：５０２９２４９６

研究成果の概要（和文）：代数体上の代数的サイクルを調べる手段の一つに l-進 Abel-Jacobi 写像がある。複素数体上の場合と違い、l-進の場合は高次 Abel-Jacobi 写像も存在する。
M. Nori のモチーフの圏の構成をもとに、高次 Abel-Jacobi 写像のガロア表現の拡大としての簡明な表示を得た。また、2 次の Abel-Jacobi 写像についての Jannsen の定理の別証明を得た。また、混合楕円モチーフの圏の構成に着手し、大枠の構成を完了した。

研究成果の概要（英文）：We studied higher l-adic Abel-Jacobi map which is a method to detect algebraic cycles over number fields. Using Nori's construction of the category of motives, we obtained a simple description of higher Abel-Jacobi map. We give an alternate proof of a Theorem of Jannsen on the second Abel-Jacobi map. We have started the construction of the category of mixed elliptic motives.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数論的幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：モチーフ

１．研究開始当初の背景
過去１０年の数論幾何学の大きな成果の一つに混合モチーフの理論の進展が挙げられる。Voevodsky、花村、Levine は独立にある三角圏を構成した。これらは存在が予想される混合モチーフの圏の導来圏の候補として構成された。現在ではこれらの三角圏は全て同値であることがわかっている。この発展の結果モチーフの理論は大幅に一般化、抽象化された。

Voevodsky による Milnor 予想の証明の重要な鍵は、ホモトピー論の応用である。
今後のモチーフの研究の方向の一つはホモトピー論の応用をさらに進めることである。それは理論の更なる抽象化を意味する。

もう一つの研究の方向としてはより具体的な物を研究することがある。代表者は代数体上の代数多様体の K 群、Chow 群の数論的な性質を具体的な場合に研究してきた。その後少しその研究から離れていたが、最近具体的な研究のための新たな手法が現れつつある。例えば９０年代の終わりに M. Nori により混合モチーフの圏が構成された。彼の構成の特色は非常に具体的なものから出発していることである。かれは導来圏ではなく混合モチーフの圏を直接構成している。
これにより、今まで抽象的な定義しか知られていなかったいくつかの不変量の具体的な記述が得られるようになった。また楕円曲線の研究に非常に有効だったポリログなどもより種数の高い代数曲線に対し構成する試みが進んでいる。

２．研究の目的

(1)高次 l-進アーベル-ヤコビ写像の研究:
Nori のモチーフの構成により Chow 群や K 群に対する新たな不変量が定義される。これは今まで知られた、ホッジ理論や l-進コホモロジーから定義される不変量を統一するものと言える。これにより、抽象的な定義のみが存在して計算方法が無かった高次 l-進アーベル-ヤコビ写像のより具体的な記述が得られるようになった。これにより高次 l-進アーベル-ヤコビ写像を Chow 群や K 群の新たな元を発見するための道具とする可能性が出てきた。これにより見つかる元は本質的に新しいものであることが期待される。また、代数体上の代数多様体の代数体上定義された Chow 群の、高次アーベル-ヤコビ写像は０写像であることが予想されているが、いままでは計算方法が存在せず、証明も反例も存在しない。この具体的な記述を使ってこの予想についての結果が出ることが期待される。
今のところ高次 l-進アーベル-ヤコビ写像は、体上定義された代数多様体の Chow 群や K 群に対する不変量であるが、この具体的な記述が得られたことにより、代数多様体の族に対して相対版を構成する可能性が出てきた。アーベル-ヤコビ写像の相対版が強力である事は、複素数体上の古典的なアーベル-ヤコビ写像の場合から経験的に知られており、Chow 群や K 群を探索する有力な道具となることが期待される。

(2)代数体上の代数多様体の Chow 群、K 群の数論的性質の研究:
代数体上の代数多様体については、L関数と Chow 群、K 群の関係について興味深いいくつかの予想（Tate 予想、Beilinson 予想等）がある。Tate 予想は、代数体上の代数多様体について、そのエタールコホモロジーの、ガロア群が自明に作用する部分は代数的サイクルで生成されるという予想である。
また、Beilinson 予想は、同じく代数体上の代数多様体の L-関数のある整数点での零の位数とその多様体の代数的 K 群の次元が等しいことを主張する。したがってこれらの予想を検証する場合の重要なステップは予想される性質を持つ代数的サイクル、または代数的 K 群の元を構成することである。

過去数年モチーフの一般論の研究が隆盛を見る中数論的な性質の研究はやや低調であった。しかし最近新たな発展の兆しがみられる。代表者は Tate 予想の具体例による検証を行っている。Taylor は最近 Fontaine-Mazur に関する重要な結果を出した。この結果により、Tate 予想について新たに検証すべき具体例が多数見つかった。それらの検証を行う。また de Jeu-Zagier らは代表者の結果を発展させ、代数曲線の K2 に関する興味深い結果を得た。彼らの手法には新たなアイデアが見られ、さらに一般化できる可能性がある。K 群の元の構成については、ポリログの高次元化を試みるべきである。楕円曲線の場合に成功したこの理論は、高次元化については Beilinson-Levin による萌芽的な研究の後少し停滞していたが、最近坂内健一氏などが新たな試みをしている。彼との共同研究で新たな進展を見る可能性がある。

(3)Chow 群の有限次元性の研究:
代数多様体の Chow 群や K 群は一般に巨大な群であり、通常の代数幾何的な対象では捕らえられない無限次元的な物である。しかし近年木村、O'Sullivan により Chow 群の新たな有限次元性の概念が定義された。この定義で

は代数曲線およびその積から生ずる代数多様体(アーベル多様体など) は全て有限次元の Chow 群を持つ。信ずべき予想によれば、全ての代数多様体はこの新しい意味で有限次元な Chow 群を持つ。次の課題は、有限次元な Chow 群を持つ本質的に新しい、代数曲線の積から生じないような代数多様体の発見である。Nori の理論から定義される新たな不変量を応用することが考えられる。代表者はこれに関する研究をしている。この結果はまだ完全に満足すべきものとはなっておらず、更なる進展を試みる。現在代数曲面の有限次元性を研究しており、木村氏と共同研究を行う。

３．研究の方法

(1)高次 l-進アーベル-ヤコビ写像について。現在得られている高次 l-進アーベル-ヤコビ写像の記述は、代数多様体のエタールコホモロジーの 2-拡大という形である。この写像による代数的サイクルの像が非自明かどうかを判定するには、この 2-拡大がガロア群の表現の 2-拡大として非自明かどうかを判定する必要があり、それはあるベクトル空間に値を持つガロア群の 1-コサイクルがより次元の高い別のベクトル空間に値を持つ 1-コサイクルに持ち上がるかどうかを判定することに帰着される。代数体上の代数多様体の、代数体上定義された代数的サイクルの高次 l 進アーベル-ヤコビ写像による像は０である、という予想の検証を行う。

(2)代数体上の代数多様体の Chow 群、K 群の数論的性質の研究について。Beilinson 予想は、代数体上の代数多様体の L 関数と、代数的 K 群の関係を記述する。この予想の検証において重要なステップは、代数的 K 群に元を構成することである。代表者は種数２のフェルマー曲線についてこの予想の検証を行った。最近 de Jeu, Zagier らはこの結果を発展させ、いくつかの代数曲線に対しこの予想の検証を行っている。この結果には新しいアイデアが見られ、更なる進展が期待される。de Jeu との共同研究でより多くの例での検証を目指す。

４．研究成果

Nori のモチーフの圏の構成を使い、高次アーベルーヤコビ写像の簡明な表示を得た。
また高次アーベルーヤコビ写像についての Jannsen の定理の別証明を与えた。また、Bloch と Kriz による混合 Tate モチーフの圏の構成を一般化する混合楕円モチーフの圏の構成に着手し、基本的な構成を完了した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

1. <u>K. Kimura</u>, A remark on the second Abel-Jacobi map}, preprint 10 pages (2008), to appear in the proceedings of Tata international colloquium on cycles, motives and Shimura varieties. 査読有

2. <u>K. Kimura</u>, Nori's construction and the second Abel-Jacobi map}, K. Kimura, Mathematical Research Letters 14(2007), no.6, 973-981. 査読有

3. <u>K. Kimura</u>, Murre's conjectures for certain product varieties}, K. Kimura, J. Math. Kyoto Univ. 47-3(2007), 621-629. 査読有

4. <u>K. Kimura</u>, Zero-cycles on self-product of modular curves}, K. Kimura, Math. Z. 256 (2007), 563-571. 査読有

〔学会発表〕（計７件）

1. <u>K. Kimura</u>, "Mixed elliptic motives", Weekend workshop on algebraic varieties, Fields Institute, Toronto, March 7, 2010.

2. <u>K. Kimura</u>, "On the second Abel-Jacobi map", International colloquium on "Cycles, Motives and Shimura varieties", Tata Institute, Mumbai, January 10, 2008. 招待講演

６．研究組織

(1)研究代表者

木村　健一郎 (KIMURA KENICHIRO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師
研究者番号：５０２９２４９６

(2)研究分担者

木村　俊一（KIMURA SHUN-ICHI）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：１０２８４１５０
（H21：研究協力者）

坂内　健一（BANNAI KENICHI）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：９０３４３２０１
（H20→H21：連携研究者）