様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月２０日現在

機関番号：12501
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2010
課題番号：19540010
研究課題名（和文）ｐ進微分方程式の数論への応用

研究課題名（英文）Application of p-adic differential equations to number theory

研究代表者
松田　茂樹（MATSUDA SHIGEKI）
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90272301

研究成果の概要（和文）：剰余体 k が代数閉体上の多変数のローラン級数体であるようあ正標数の完備離散付値体に対し、これを剰余体とする Robba 環を係数とする微分加群の非正則度によるフィルトレーションを、k が完全体である場合の Christol と Mebkhout によるフィルトレーションの定義を一般化する形で定義した。また微分加群が完備離散付値体の有限次分離拡大で解ける場合に、解空間のなすガロア表現の Abbes と齋藤によるフィルトレーションからくるフィルトレーションと比較し、ある補題を認めることで一致することを示した。

研究成果の概要（英文）：Let k be a filed of Laurent series with several variables over an algebraically closed field of positive characteristic and let E be a complete discrete valuation ring of equal characteristic with residue field k. We defined a filtration for a differential module over the Robba ring with residue filed E with respect to the irregularity, which generalized classical filtration defined by Christol and Mebkhout. Then we showed that the filtration coincides with the filtration that comes from the Abbes-Saito filtration on the solution space regarded as Galois module when the differential module can be trivialized by the finite separable extension of the residue field E.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論

１．研究開始当初の背景

ｐ進微分加群ないしはｐ進微分方程式の理論においては，「ｐ進局所モノドロミー予想(Crew 予想)」と呼ばれる大きな予想が，今世紀のはじめに Andre, Mebkhout, Kedlaya の３人によって別々に解かれた。また Berger は，この定理が「ｐ進ド・ラム表現は可能的半安定であるだろう」というやはり大きな予想と同値であることを示し，結果的にこの予想を解決するというできごとがあった。

ここで言う「ｐ進局所モノドロミー予想」は，

(剰余体が完全体であるような) 正標数の完備離散付値体の上の p 進数係数の微分加群の有限性についての定理であるが, Berger が解決した予想は、p 進数体の上の p 進数係数の微分加群の有限性についての定理ともみなせる。(そのためこちらも「p 進局所モノドロミー定理」と呼ばれることがある。)

この両者が単なる類似ではなく理論的に結びついたことで、p 進 Hodge 理論など、数論において活発に研究されている分野への様々な応用が考えられるようになった。つまり、p 進微分加群の理論は正標数の完備離散付値環の理論だけではなく、混標数の完備離散付値環の両方の数論の研究にとって重要な意味を持つわけである。このように、p 進微分方程式の理論の応用は数論のより広い分野へ広がりつつあったために、必要とされる p 進微分方程式の性質についても、より一般的では精密なものが求められるようになってきていた。

特に研究開始時には、Pulita による Lubin-Tate 加群を用いた階数 1 の 1 階線型常微分方程式の解の構成、Marmora による p 進局所定数の理論、Kedlaya による p 進微分方程式による剰余体が完全とは限らない場合の分岐理論などの研究があった。特に Kedlaya の研究は、過収束 F アイソクリスタルについての半安定還元予想の解決を一つの大きな動機として、それ以前の研究が主に 1 変数であったのに対し、多変数における微分加群を積極的に扱い、様々な研究手段を整備しつつあった。また筆者も分岐理論との関連で、多変数の場合の微分加群のフィルトレーションの構造についての Christol と Mebkhout の 1 変数の場合の予想を多変数の場合に一般化する予想を得ていた。

２．研究の目的

以上の状況を踏まえると、p 進微分加群の理論を一般化および精密化することで、数論への応用を広げることが重要であると考えられる。それには様々な対象があるが、特に本研究では、

(1) 剰余体が不完全な場合の正標数の離散付値体の場合への微分加群の理論の一般化
(2) 剰余体が完全であっても代数閉ではないときの微分加群の理論の精密化

の 2 つについて明らかにすることを目的とした。特に(1)では Christol と Mebkhout による一変数の場合の微分加群についてのフィルトレーションを彼等の定義と近い形で高次元化し、Abbes および齋藤による剰余体が不完全な場合の分岐理論との関係を明らかにすること、更にはそれを Berthelot の数論的 D 加群の理論に応用することを目標とした。

またガロア表現については加藤および齋藤により D 加群の理論との類似で特性多様体や特性サイクルが構成されているが、微分加群についても、Berthelot による数論的 D 加群とみなしたときの特性多様体や特性サイクルがあり、また Christol-Mebkhout による形式解の収束半径も、曲線の場合なので、特性多様体は自明なものしかないが、見かけの上では特性サイクルと結びついていることが観察される。これらの中にはまだ一般には定義されていない場合もあるが、微分加群が解空間を取る関手を通して完備離散付値体のガロア表現に対応する場合に、具体的な例においてこれらの関連を調べる。

また(2)では、局所的にフロベニウスの作用が問題になる。これまでは剰余体が有限体である正標数の離散付値体上の p 進微分加群を、筆者によって構成された Katz-Gabber 型の局所大域対応によって大局的に広げた場合、大域的な p 進微分加群のフロベニウスの存在は、局所有限体を適当に拡大し、したがって対応するフロベニウスもその巾で取り換えないと、その微分加群への作用の存在が言えていない。このことは、例えば p 進 L 関数の局所定数への応用などを考える際に問題となる。これを剰余体の拡大なしに扱えるようにすることを目標とした。

３．研究の方法

(1) 剰余体が完全とは限らない場合の微分加群の理論については、Christol-Mebkhout の方法に近い形でのフィルトレーションの理論の高次元化を行う。即ち、微分作用素のなす環 D に正の実数を媒介変数として持つ位相を入れ、微分加群を D 加群とみて D の位相から来る商位相を入れる。この位相に対して 0 の閉包を取ることでフィルトレーションを定義する。一方で、微分加群が有限拡大によって解ける場合については、拡大を定義する方程式のテイラー展開に付随して得られる剛解析空間を考察し、Abbes-齋藤による手法を真似て連結成分を用いてフィルトレーションを定義し、それを上のフィルトレーションと比較する。

またそしてガロア表現に対する Abbes-齋藤のフィルトレーションとが、Fontaine などによって研究されている微分方程式の解空間を取る関手を通して、上のフィルトレーションと一致することを示す。

また微分加群の階数が１の場合には、筆者および Pulita による結果によって極めて具体的な形での微分加群の構造が書き下せることがわかっている。これを用いることにより、Berthelot による数論的Ｄ加群としての構造、特に有限表示の具体的な完全列を書き下すことで、特性多様体を調べる。加藤により定義された階数１のガロア表現の精密化されたスワン導手と呼ばれる特性多様体も具体的にかけるので、それを用いて特性多様体や特性サイクルなど分岐との関連を考察する。

(2) の剰余体が完全ではあるが代数閉とは限らない場合の微分加群のフロベニウス構造については、必ずしも大域的なフロベニウスの存在がいえない可能性もあるが、その際にも降下の手法により、局所定数への応用を考える。

４．研究成果

(1) まず研究目的の一番目である剰余体が完全とは限らない場合の微分加群の考察については、正標数の完備離散付値体として正標数の代数閉体上の多変数のローラン級数体ｋを係数体に持つローラン級数体を考え、このような体の上の局所的な過収束アイソクリスタルに対応する微分加群を考察した。正確には、このような完備離散付値体を剰余体に持つ Robba 環の上の加群で、可積分な接続を持つものについて考察した。ここで考えている Robba 環は、Dwork や Robba、Christol、Mebkhout らによって考察された Robba 環において、その剰余体である完備離散付値体の剰余体ｋを、完全体ではなく代数閉体上の多変数ローラン級数体で置き換えて一般化したものであり、それに従って Robba 環に付随する微分も、この多変数のローラン級数体の変数が反映されたもので置き換える。このような微分加群を考えることは、高次元の正標数の多様体上の過収束アイソクリスタルを、因子の生成点で局所化して考察することに相当する。この Robba 環はネーター環ではないが、ベズー環にはなっており、その中である種のノルムが有界である部分環はヘンゼル環になっている。その剰余環を、この Robba 環の剰余環と呼ぶことにする。

Christol-Mebkhout はｋが代数閉体の場合に次のようにフィルトレーションを定義した。まず微分作用素のなす環Ｄに適切な位相を入れ、微分加群Ｍを代数的なＤ上の加群として有限表示し、Ｄの直積位相の商位相としてＭに位相を入れて、その０の閉包を取ることでＭの部分微分加群を定める。そしてＭをその部分加群で割った商にも同様の方法で部分微分加群を定める。このような操作を繰り返すことでフィルトレーションが定まる。これはｐ進微分加群については非正則度によるフィルトレーションになっている。彼らは更に、このフィルトレーションが、形式解の収束半径によって定まるｐ進重みと正確に対応することを示した。

本研究では、Christol-Mebkhout のＤ加群を用いたフィルトレーションについて、その一般化が構成できることを示した。こちらは微分加群が必ずしも剰余体の有限次拡大で解けない場合にも定義される、より一般のものになっている。なお、Abbes-齋藤によるフィルトレーションの構成にみられるように、この種のフィルトレーションには対数付きおよび対数なしの２種類があるが、今の場合もその両方についてのフィルトレーションの構成が可能である。また、このフィルトレーションは上述のように形式解の収束半径から定まるｐ進重みによるフィルトレーションと対応するのだが、その構成が Abbes と齋藤による剰余体が完全とは限らない場合の分岐フィルトレーションと非常に似ていることに注目し、Robba 環の元の「テーラー展開」のなす環を構成し、対応して定まるリジッド解析空間が良い性質を持つことを示すことで、微分加群が Robba 環の剰余体の有限次ガロア拡大に対応する拡大で解ける場合に Abbes-齋藤に類似の方法でフィルトレーションを定義した。この場合については、解空間を取る関手によって微分加群に対応して完備離散付値体のガロア表現が構成され、それには Abbes と斎藤によって分岐フィルトレーションが定義されている。この関手によって、2 つのフィルトレーションとが一致するかという問題の解決が、大きな目標であったのだが、これについては、ブローアップの制御の部分である補題を仮定することでしか、一致することを示せてはおらず、最終的な解決には到ってはいない。

なお、本研究の開始後、Liang Xiao により、非常に近い問題についての論文が出た。彼は Kedlaya の定義した微分作用素のノルムを利用したフィルトレーションと Abbes と斎藤によるフィルトレーションの比較を行っている。これについては現在、本研究と比較し、関連を調べているところである。

また、微分加群が上の説明であるようなガロア表現から来る場合、特に１次表現から来る場合に具体例を構成し、Berthelot による数論的Ｄ加群としての構造を調べ、対数なしの場合には、Christol-Mebkhout の方法を一般化して得られる形式解の収束半径から定ま

るｐ進重みによって特性多様体を定義した場合、数論的Ｄ加群の構造から定まる特性多様体とは異なることを観察した。一方で、加藤和也による階数１のガロア表現に対して精密化されたスワン導手から決まる特性多様体とは一致することが観察されている。

(2) 剰余体が完全ではあるが代数閉とは限らない場合の微分加群のフロベニウス構造については、次の問題を考察した。以前の筆者の結果と Andre, Mebkhout, Kedlaya の示したｐ進局所モノドロミー定理を組み合わせると、古典的なRobba環上のフロベニウスの作用付きの微分加群を、そのRobba環の剰余体の係数体上で定義される代数的トーラス上の大局的な対象である過収束アイソクリスタルで(1 つの)無限遠点ではたかだか確定特異点しかもたないものに、一意的な方法で延長できることが示せる。このときもとの微分加群のフロベニウス構造が、大局的な過収束アイソクリスタルに延長できるかが問題になる。これについては巾単部分についてはほぼ自明に成立するのだが、Robba 環の剰余体のガロア拡大からくる部分については、多少の進展はあったものの、残念ながら目標とする結果は得られなかった。

ただし、副産物として、過収束性を持つ線形位相を持った可換環については、かなり一般的な状況でヘンゼル性が成立することを示した。この結果については、Compositio 誌に発表予定のR. Crew氏の論文 "Arithmetic D-modules on the unit disk" の appendix として掲載される予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計２件）

① 松田茂樹, Abbes-Saito filtration and Chiristol Mebkhout filtration, Arithmetic geometry and p -adic differential equations,
平成22年7月1日, 東北大学

② 松田茂樹, Arithmetic D-module corresponding to rank one representations, p-adic method and its applications in arithmetic geometry at Sendai ,平成20 年11 月7 日,東北大学

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
松田　茂樹（MATSUDA SHIGEKI）
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90272301

(2)研究分担者
なし
(3)連携研究者
なし