

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007年度～2010年度

課題番号：19540015

研究課題名(和文) 代数群のクンマー理論による整数論の新しい展開

研究課題名(英文) New developments in number theory from the Kummer theory of algebraic tori

研究代表者

木田 雅成 (KIDA MASANARI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究所・教授

研究者番号：20272057

研究成果の概要(和文)：代数的トーラスの有理点のなす群と最大基本アーベル拡大のガロア群の双対性を証明した。これは古典的なクンマー理論の1の冪根を含まない体への自然な拡張になっている。クンマー理論の基礎体が素体まで下げられるいくつかの場合について、巡回拡大を与える方程式の具体的な形を計算機を援用することによって計算することができた。またこの理論の代数学、整数論への応用も研究した。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we are primarily concerned with a duality between the groups of rational points of algebraic tori and the Galois groups of maximal elementary abelian extensions over base fields without roots of unity. This is a natural generalization of the classical Kummer theory. We also compute generic polynomials for cyclic groups of small order in the case where the base field is a prime field. Several applications are also studied.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の研究代表者は平成16年度から平成18年度にわたって科学研究費補助金・基盤(C)「代数群の整数論の計算整数論への応用」の援助を受けることにより、ノルム写像の核になる代数的トーラスを使ったクンマー理論を証明した。(Journal of Algebra, 293 (2005)). これによって、基礎体が1のべき根を含まない場合にも、円分体の十分な大きな部分体を含んでいれば、古典的なク

ンマー理論の類似が成り立ち、基礎体上の巡回拡大体を具体的に記述できることが示されたことになる。

しかしながら、代数学や整数論への応用を考えた場合、より広範囲に成立し、より自然で、柔軟性のある理論が必要となっていた。特にその基礎的な部分において、たとえば分岐の様子といった、より詳細な拡大の情報が必要であり、拡大体の生成元のより具体的な記述と古典クンマー理論との関係

の記述が必要になっていた。

また古典的なクンマー理論の応用が不定方程式論などにも応用され、おおきな広がりをもっていること考えたとき、新しいクンマー理論にも整数論などに多くの具体的な応用があることが期待されていた。

## 2. 研究の目的

1. でのべた状況をふまえて、本研究では、次のような研究目標をたて研究を進めた。

(1) クンマー理論の基礎理論の確立と拡張

(2) クンマー理論から導かれる方程式の計算と既知の巡回多項式との関係の研究

(3) クンマー理論の応用の開拓

このように基礎理論の成熟とともに、その応用の開拓により、この理論の有用性を明らかにすることを研究の目的とした。

## 3. 研究の方法

乗法群の Weil 制限とよばれる代数的トーラスを研究対象に選び、このトーラスを使ってクンマー理論を再構築することにした。

関係分野の論文の精読を行うとともに、研究集会、学会の機会を利用した資料収集や研究打ち合わせなどを通じて研究を進めた。

特に最初の3年間は英国、香港、オーストラリアで開かれた国際研究集会で研究発表を行い、海外の研究者と活発な研究交流を行い研究の進展につなげることができた。

国内でもいくつかの研究集会に関して運営にかかわり、それらの研究集会中には集中的な討議を行った。特に2007年度の山形大学での研究集会、2008年度の徳島大学での研究集会は本研究と密接な関係をもつ研究集会で、本研究を進めるために不可欠な役割をはたした。

また本研究では計算機代数ソフトウェア Magma をうまく活用することにより、代数的トーラスの同種写像が定める巡回拡大のうちでも比較的大きな例の構成などを効率的に進めることができた。2010年度には九州大学で Magma に関する集会を企画・運営し、多くの参加者とともにこのソフトウェアの活用について多くの知識をえることができ、研究に生かすことができた。

## 4. 研究成果

(1) 「クンマー理論の基礎理論の確立と拡張」に関しては、体の乗法群の Weil 制限と呼ばれる代数的トーラスの自己準同型を研究し、この代数的トーラスを使ったクン

マー理論を証明することができた(雑誌論文[1])。これはノルムトーラスを使ったクンマー理論より、簡明であり、さらに古典的なクンマー理論を含むことから、より柔軟な応用に耐えうる理論であることが期待される。さらにこの理論から作ったクンマー拡大に関しては、クンマー生成元などの付加的情報を多く引き出すことに成功した。

さらにガロア群の作用でひねったクンマー系列を使うことによってメタ巡回拡大と呼ばれる拡大をすべて構成することができることがわかった。

(2) 「クンマー理論から導かれる方程式の計算と既知の巡回多項式との関係の研究」に関しては、いくつかの成果があがった。

まず素体上の巡回7次多項式を明示的に計算した(雑誌論文[1])。

また既知の巡回五次多項式とクンマー理論から得られる巡回五次多項式の比較同型定理を証明し、同型類の決定を行った(雑誌論文[4])。

さらに代数的トーラスからはなれて、楕円曲線の同種写像から得られるクンマー系列から、Brumer の五次多項式と呼ばれる generic 多項式の同形類を分類する空間を作ることができた(雑誌論文[2])。同型な体をあたえる方程式のパラメータを決定する同型問題と呼ばれる問題を Brumer 多項式の場合に解決したことになる。

さらにメタ巡回拡大をあたえる方程式についても一番簡単な場合に対手ではあるが具体的に計算することができた(雑誌論文[1])。

(3) 「クンマー理論の応用の開拓」については先にあげたメタ巡回拡大の構成への応用がまず最初にあげられる。この結果は On metacyclic extension という題目の論文にまとめ、現在学術雑誌に投稿中である。

この構成を大域体に適用し、類体論を使うことによって、イデアル類群の間の鏡映定理と呼ばれる定理が導かれる。しかしながら、この結果は現在のところ、既存の結果の別証明といったレベルにとどまっており、論文の形にまとめるためには、今後の研究で具体的な計算での有用性を示すことにより、この結果の成果を高めていかななくてはならないと考えている。

当初、研究目標としていたクンマー理論類体論のペアリングの研究に関しては、結果に到達できるまでにはいたらなかったが、関連文献の調査、論文の精読などを行い、今後の研究につながるものを得ることができた。

(4) これらの研究成果についての詳細は下記にあげる雑誌発表論文の他に、次のような研究集会の報告集にも述べてある。

- ① 冪根を含まない体のクンマー理論について.  
第 5 回北陸数論研究集会報告集 2009 pp. 87-94.
- ② D<sub>5</sub> 拡大のクンマー理論. 早稲田大学整数論研究集会 2008 報告集 pp. 51-62
- ③ 計算代数システム Magma による代数構造の計算. 数理解析研究所講究録別冊 B19. pp. 107-116. (2010).
- ④ 数論研究者のための Magma 入門. 第 7 回北陸数論研究集会報告集 pp. 59-79.
- ⑤ 初心者のための Magma 入門. COE Lecture Note Vol. 29. pp. 1-13. Kyushu University (2010).

① にはより広い枠組みでクンマー理論が成り立つための条件が述べられている。②は楕円曲線による Brumer 多項式の同型類の分類に関する解説であるが、この多項式の分解体の分岐に関する定理など雑誌に発表していないものも含まれている。③から⑤は本研究での Magma の使用例を含む Magma の解説である。

また下記のウェブページからはこれらの報告集の原稿や、講演のスライド等を入手可能である。

(4) 研究分担者の大野真裕は代数群の整数論に関する研究協力をするとともに、ベクトル束の安定性に関連して、導来圏の安定性条件、 $t$  構造、torsion pair などについての研究を行った。この成果は高知大学でのセミナーで発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- [1] Kida, Masanari: A Kummer theoretic construction of an  $S_3$ -polynomial with given quadratic subfield. *Interdisciplinary Information Sciences* **16** (2010), 17-20.
- [2] Kida, Masanari, and Rikuna, Yuichi and Sato, Atsushi: Classifying Brumer's

quintic polynomials by weak Mordell-Weil groups. *Int. J. Number Theory*. **6** (2010), 691-704.

[3] Kida, Masanari: Descent Kummer theory via Weil restriction of multiplicative groups. *J. Number Theory* **130** (2010), 639-659.

[4] Kida, Masanari, Renault, Guenael and Yokoyama, Kazuhiro: Quintic polynomials of Hashimoto-Tsunogai, Brumer, and Kummer. *Int. J. Number Theory* **5** (2009), 555-571.

[学会発表] (計 16 件)

[1] 木田雅成: 初心者のための Magma 入門. Magma でひろがる数学の世界. 九州大学. Oct. 9, 2010.

[2] 大野真裕:  $t$  構造つき三角圏での tilting について. 数理科学セミナー. 高知大学理学部. 2010 年 9 月 14 日.

[3] 木田雅成: イデアル類群の鏡映定理について. 香川セミナー. 香川大学教育学部. June 12, 2010.

[4] 木田雅成: Metacyclic 拡大の構成について. 東北大学代数セミナー. 東北大学理学研究科. September 8, 2009.

[5] Masanari Kida: Constructing metacyclic extensions. First PRIMA Congress. The University of New South Wales, Sydney, Australia. July 10, 2009.

[6] 木田雅成: 数論研究者のための Magma 入門. 第 7 回北陸数論研究集会 December 26, 2008.

[7] 木田雅成: 計算代数システム Magma による代数構造の計算. 「代数的整数論とその周辺」京都大学数理解析研究所 December 10, 2008.

[8] 木田雅成: On metacyclic extensions. 日韓整数論セミナー. 東北大学片平キャンパスさくらホール November 14, 2008.

[9] 木田雅成: On metacyclic extensions. 研究集会「ガロア理論とその周辺 徳島 2008」徳島大学工業会館 September 9, 2008.

[10] Masanari Kida: Classification of Brumer's quintic dihedral polynomials. Foundation of Computational Mathematics (FoCM08) Computational Number Theory Workshop City University of Hong Kong, June 25, 2008.

[11] 木田雅成 : D<sub>5</sub> 拡大のクンマー理論. 第13回早稲田大学整数論研究集会 早稲田大学理工学部 March 11, 2008.

[12] 木田雅成 : A classification of isomorphic classes of Brumer's quintic polynomials using elliptic curves. 研究集会「ガロア理論とその周辺」山形大学理学部 November 3, 2007.

[13] 木田雅成、横山和弘、Guenaël Renault: Brumer の多項式の分解体について. 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会 東北大学理学部 September 23, 2007.

[14] Masnari Kida: Descent Kummer theory via Weil restriction of multiplicative groups. 25th Journées Arithmétiques University of Edinburgh, Scotland. July 3, 2007.

[15] Masanari Kida: Kummer theory without roots of unity. Seminaire de calcul formel SPIRAL/SALSA Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. June 27, 2007.

[16] 木田雅成 : 乗法群のヴェイユ制限による降下クンマー理論. 早稲田整数論セミナー May 18, 2007.

[その他]

ホームページ等

<http://mathweb.e-one.uec.ac.jp/~kida/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

木田 雅成 (KIDA MASANARI )  
電気通信大学・大学院情報理工学研究  
科・教授  
研究者番号 : 20272057

### (2) 研究分担者

大野 真裕 (OHNO MASAHIRO )  
電気通信大学・大学院情報理工学研究  
科・准教授  
研究者番号 : 70277820