様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 5 月 15 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540018
研究課題名（和文）　アフィンファイブレーションの研究

研究課題名（英文）　Study of affine fibrations

研究代表者
小野田　信春（ONODA NOBUHARU）
福井大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：40169347

研究成果の概要：可換ネーター正規環Ｒ上、余次元１のファイバー環がすべて１変数多項式環であるような忠実平坦Ｒ－代数Ａについて考察し、Ａの構造を解明するとともに、その応用を与えた。関連して、Ｒ上１変数多項式環のネーター部分環Ａについて考察し、Ｒ上有限生成でないネーター部分環の具体例をさまざま構成するとともに、ＡがＲ上有限生成であるための条件を求めた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,400,000		1,820,000

研究分野：可換代数学
科研費の分科・細目：数学・代数学・
キーワード：可換環論、アフィン代数幾何学

１．研究開始当初の背景
(1) 可換ネーター環 R と R-代数 A が与えられたとき、R の素イデアル P に対し、A_P/PA_P をＰ上 A のファイバー環という。ファイバー環は A の R-代数としての構造を反映するが、逆に R の各素イデアル P に対し、P 上 A のファイバー環の構造が与えられたとき、そこから A の構造についてどういうことが導けるであろうか。これは、幾何学的にも意味のある、可換環論における興味ある問題の一つである。この問題で、もっとも基本的なのは、各ファイバーが基礎体 k(P) 上のｎ変数多項式環になる場合、すなわち、

(*)　$A_P/PA_P=k(P)^{[n]}$

となる場合である。ただし、k(P)は R/P の商体を表し、$B^{[n]}$は環 B 上のｎ変数多項式環を表す。この条件を満たすとき、A は R 上の $\boldsymbol{A}^n$-fibration と呼ばれる。$\boldsymbol{A}^n$-fibration の構造に関する研究が始まったのは 1970 年代後半からであるが、もともとは deformation に関連するアフィン代数幾何学的な問題意識が出発点である。その後、1980 年代後半に浅沼照雄らの貢献で、$\boldsymbol{A}^n$-fibration の構造と性質に関する研究がかなり進展した。
(2) 1980 年代の研究の後、可換環論の立場からの最初に重要な貢献は、Bhatwadekar と Dutta の共同研究である。彼らは n=1 として、ファイバー条件(*)が高さ 1 以下のすべての

素イデアル P について成り立つような A を codimension-one $\mathbb{A}^1$-fibration と呼び、それについて考察した。そして、R はネーター正規局所環で A は R 上忠実平坦という仮定の下で、A が R 上の多項式環の部分環のとき、または、A が R 上有限生成のとき、codimension-one $\mathbb{A}^1$-fibration は R 上１変数の多項式環になることを示した。その後、報告者は Dutta との共同研究で、この定理を一般化すると共に、R が一意分解整域のとき、忠実平坦な codimension-one $\mathbb{A}^1$-fibration の構造を決定することに成功した。しかし、R が一意分解整域でない場合の構造決定はその時点では未解決であった。

２．研究の目的

(1) 以上の背景を踏まえ、本研究で目的としたのは、まず次の問題の解決である。

1. ネーター正規環 R 上の codimension-one $\mathbb{A}^1$-fibration の構造を明らかにせよ。

(2) 一般に $\mathbb{A}^n$-fibration は多項式環の部分環になることが知られている。このことから多項式環の部分環が $\mathbb{A}^n$-fibration となるための条件を求めよ、という問題が自然に考えられる。$\mathbb{A}^n$-fibration は R 上有限生成でもあることから、$\mathbb{A}^n$-fibration との関連で、本研究では次の問題を考察する。

2. ネーター正規環 R 上の多項式環の部分環が R 上有限生成であるためのファイバーに関する条件を求めよ。

(3) R が整域で、ファイバー条件(*)が P=0 について成り立つとき、A は generic $\mathbb{A}^n$-fibration と呼ばれる。最も基本的なのは、R が離散付値環の場合で、このとき問題となるのは特殊ファイバーA/mA の構造である。ただし、ここに m は R の極大イデアルを表す。代数幾何との関連では、より一般に生成ファイバーが R の商体 K 上のアフィン多様体になっている場合が重要である。これに関し、本研究では次の問題を考察する。

3. 体 K の付値環 (V,P) と K 上の代数関数体 L の付値環 (V_1,P_1) で $V_1\cap K=V$ を満たすものについて、剰余体 V_1/P_1 の V/P 上の代数関数体としての構造を明らかにせよ。

以上が本研究の目的である。

３．研究の方法

(1) まず、本研究には、海外共同研究者として、Bhatwadekar 教授（Tata Institute、インド）と Dutta 准教授（Indian Statistical Institute、インド）に加わっていただく。

(2) 今回の研究は過去の研究の発展であり、関連するいくつかの結果を得ているので、それらを利用すると共に、その際に行った考察を深化させることで解決を目指す。そのための具体的な方法は次のとおりである。

・国内外の各地の研究者と随時研究連絡、討論、打合せ等を行う。

・海外共同研究者とは、普段は e-mail 等により情報交換を行うが、年に一度、海外共同研究者のもとに出張して直接討論する。

・コンピュータを利用して、計算の効率化を図る。

・研究成果の複写を各地に送り、情報交換を行う。

・各種シンポジウム、セミナー等に出席し、研究経過及び成果を発表する。

４．研究成果

(1) 最初の目標であるネーター正規環 R 上の codimension-one $\mathbb{A}^1$-fibration の構造決定についての研究成果を述べる。以下､A は R 上忠実平坦な R-代数とする。R の高さ１の素イデアルの集合を Δで表わす。このとき、まず、次が成り立つ。

A が R 上の codimension-one $\mathbb{A}^1$-fibration になるための必要十分条件は、

$$A_P = R_P^{[1]} \quad (\forall\ P\in\Delta)$$

が成立することである。

以下、A はこの条件を満たすと仮定する。特に、R 上 A の生成ファイバーは R の商体 K 上の1変数多項式環になり、従って、 $R[x]\subset A\subset K[x]$ をみたす A の元 x が存在する。この x を generic variable と呼ぶ。

Δの有限部分集合の全体を ∇ で表わす。$\Gamma\in\nabla$ に対し、R-代数 A_Γ を

$$A_\Gamma = \cap\{A_P \mid P\in\Gamma\}\cap\{R_P[x] \mid P\in\Delta\setminus\Gamma\}$$

により定める。A_Γ は A の部分環になる。また、それらの族 $\{A_\Gamma \mid \Gamma\in\nabla\}$ は包含関係を順序として直系を成す。以上の準備の下で、次の構造定理が成り立つ。

定理　各 $\Gamma\in\nabla$ に対し、R の因子的イデアル (divisorial ideal) I_Γ と R の元 c_Γ が存在して、

$$A_\Gamma = \Sigma\,(I_\Gamma{}^n)^{-1}\,(x - c_\Gamma)^n$$

が成り立つ。さらに、$J_\Gamma = I_\Gamma{}^{-1}$ とおくと、A_Γ は J_Γ の記号的 Rees 環と同型でもある。また A は直系 $\{A_\Gamma \mid \Gamma\in\nabla\}$ の直極限になる。

Δの部分集合 Δ_0 を

$$\Delta_0 = \{P \in \Delta \mid A_P \neq R_P[x]\}$$

により定める。A が R 上の局所多項式環、すなわち、R 上の対称代数になるための条件は次で与えられる。

定理　A が R の可逆イデアルの対称代数となるための必要十分条件は Δ_0 が有限集合となることである。

A から R への R-準同型写像 f で R 上恒等写像であるようなものが存在するとき、R は A の retract であるという。また、f を A から R への retraction と呼ぶ。上の構造定理から、次の定理が導ける。

定理　次の条件は互いに同値である。
(ｉ) A はネーター環で、R は A の retract である。
(ⅱ) A は R 上有限生成である。
(ⅲ) A は可逆イデアル J の R 上の対称代数に同型である。

retraction の存在に関しては次が成り立つ。

定理　次の条件は互いに同値である。
(ｉ) A から R へのretraction が存在する。
(ⅱ) R の元 c で、$c - c_\Gamma \in I_\Gamma$ がすべての ∇ の元 Γ に対して成立するものがある。
(ⅲ) A は次数付き R-多元環である。

系　R が完備局所環なら、R は A の retract である。

以上の結果の応用として、R が完備局所環の場合に、次の定理が示せる。

定理　R が正規完備局所整域のとき、次の条件は互いに同値である。
(ｉ) A はネーター環である。
(ⅱ) A は R 上有限生成である。
(ⅲ) A は R 上 1 変数の多項式環である。

さらに、次の定理も成り立つ。

定理　(R,m) は解析的既約なネーター整閉局所整域とする。このとき、A が R 上の1変数多項式環になるための必要十分条件は、$R/m \neq A/mA$ が成立することである。

次に、codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration の構成に関する研究成果を述べる。構造定理で与えられた因子的イデアル I_Γ は有限個の高さ１の素イデアルの記号的べき乗の共通部分として表せる。各 $P \in \Delta$ に対し、そこに現れるべきを対応させることで、Δから非負整数の集合 N への写像が得られる。
逆に、Δから N への写像

$$e : \Delta \to \mathbf{N}$$

が与えられたとする。このとき、Δの有限部分集合Γに対し、

$$I_\Gamma = \cap \{P^{(e(P))} \mid P \in \Gamma\}$$

により R のイデアル I_Γ を定めれば、これは R の因子的イデアルである。また、剰余環の族 $\{R/I_\Gamma \mid \Gamma \in \nabla\}$ は自然な準同型写像のもとで逆系をなす。その逆極限を R(e) で表すことにする。R(e) の元 **c** を任意にとる。この **c** に対応して、各 Γ に対しRの元 c_Γを $\{c_\Gamma \mid \Gamma \in \nabla\}$ が **c** を決めるように選ぶことができる。このとき、

$$B_\Gamma = \Sigma\ (I_\Gamma{}^n)^{-1}(x - c_\Gamma)^n$$

により B_Γ を定めれば、$\{B_\Gamma \mid \Gamma \in \nabla\}$ は R-代数族の直系になる。その直極限を

$$R(x, e, \mathbf{c}) = \lim B_\Gamma$$

で表す。このとき、次の定理が成り立つ。

定理　$B = R(x, e, \mathbf{c})$ とおくと $R[x] \subset B \subset K[x]$ であり、さらに次が成立する。
(ｉ) $B_P = R_P{}^{[1]}\ \forall\ P \in \Delta$
(ⅱ) $B = \cap \{B_P \mid P \in \Delta\}$

B は R 上 codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration であることがこの定理よりわかる。ただし、一般的にはこのようにして構成した B は R 上忠実平坦とは限らない。B の忠実平坦性を調べるために、以下のようにして定まる R-加群 M を導入する。
まず$\{I_\Gamma{}^{-1} \mid \Gamma \in \nabla\}$ が直系をなすことが示せる。その直極限を M と定義する。すなわち

$$M = \lim I_\Gamma{}^{-1}$$

このとき、次が成り立つ。

定理　B が R 上忠実平坦であるための必要十分条件は、M が R 上平坦加群となることである。

M の平坦性を調べるために、次の2つの集合を導入する。

$$\Delta_1 = \{P \in \Delta \mid P\ は単項素イデアル\}$$
$$\Delta_0 = \{P \in \Delta \mid e(P) > 0\}$$

このうち、Δ_0 については、上で定義したものと一致する。実際、e(P)= e とおくとき、$P \in \Delta$ に対し、

$$A_P = R_P[x/p^e]$$

が成り立つ。ただし、ここで、p は、離散付値環 R_p の極大イデアルの生成元である。

定理　(R,m) は解析的既約な2次元ネーター整閉局所整域とする。このとき、$\Delta_1 \cap \Delta_0$ が無限集合なら、すなわち、$e(P) > 0$ をみたす単項素イデアル P が無限に存在するなら、M は R 上平坦であり、従って、B は R 上忠実平坦である。

以下、しばらくの間 (R,m) は解析的既約な局所ネーター整閉整域とする。また、A は R 上の codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration であって、$A \neq R^{[1]}$ となるものとする。このとき、上で示した定理から、$R/m = A/mA$ が成り立ち、従って、$R/m^n = A/m^nA$ が任意の自然数 n に対して成り立つ。このことから、R の完備化を $\hat{R}$ で表すとき、R-準同型

$$\phi : A \to \hat{R}$$

が存在することがわかる。このとき、次の２つの定理が成り立つ。

定理　$c = \phi(x)$ とおくとき、次の条件は互いに同値である。
(ｉ) ϕ は単射である。
(ⅱ) c は R 上超越的である。
(ⅲ) A はクルル環である。

定理　ϕ は単射とする。このとき、A がネーター環であるための必要十分条件は、A/PA がすべての $P \in \Delta$ についてネーター環となることである。

この最後の条件に関しては、次が成り立つ。

定理　(R,m) は剰余体 k 上 essentially of finite type で2次元とする。このとき、$P \in \Delta$ について、$P\hat{R} \cap A = PA$が成り立つなら、A/PA はネーター環である。

以上の定理を応用して、k を有理数体 $\mathbf{Q}$ の代数閉包として、$R = k[X,Y]_{(X,Y)}$ の場合に、R 上忠実平坦かつネーター一意分解整域 A であって、$A \neq R^{[1]}$ であるようなものを具体的に構成できる。

これまでは、R をネーター整閉整域と仮定してきたが、構造定理をはじめ、多くの結果は R がクルル環の場合に一般化できる。また A が R 上忠実平坦という条件もゆるめることができる。後者の目的のために、次の概念を導入する。

定義　R-代数 B が2条件
(ｉ) $B = \cap \{B_P \mid P \in \Delta\}$
(ⅱ) $(a,b)B \cap R = (a,b)R$ ($\forall$ $a,b \in R$)
をみたすとき、B は R 上半忠実平坦であるという。

このとき、次の定理が成り立つ。

定理　R がクルル環で A は R 上半忠実平坦とする。このとき、以下の条件は互いに同値である。
(ｉ) A は R 上有限生成な環の R-部分環である。
(ⅱ) Δ_0 は有限集合である。
(ⅲ) A は R のある因子的イデアル J の記号的 Rees 環と同型である。

この定理の局所べき零導分への応用として次の定理が示せる。

定理　標数 0 のクルル環 R と R[X,Y] の非自明局所べき零 R-導分 D について、D の定数環を A とすれば、R の因子的イデアル J が存在して、A は R 上 J の記号的 Rees 環と同型になる。

さらに、以下の２つの定理が成り立つ。

定理　R はクルル環で、A は R 上忠実平坦とする。このとき、以下の条件は互いに同値である。
(ｉ) A は R 上有限生成である。
(ⅱ) A は R 上有限生成な環の R-部分環である。
(ⅲ) Δ_0 は有限集合である。
(ⅳ) R は A の retract で、A はクルル環である。
(ｖ) 加群 M は有限 R-加群である。
(ⅵ) A は R のある可逆イデアル I の対称代数と同型である。

定理　R はクルル環で、A は R 上平坦とし、さらに A から R への retraction f が存在すると仮定する。このとき、ker f が有限生成イデアルなら、A は R のある可逆イデアル I の対称代数と同型である。

以上が、研究目的(1)に対する主な研究成果である。

(2)　次に、ネーター正規環 R 上の多項式環の部分環 A が R 上有限生成であるためのファイバー条件を求めよ、という問題について得た結果について述べる。
まず、最も基本的な場合である R が離散付値環 (DVR) のときは、次が成り立つ。

定理　離散付値環 R について、R の剰余体 k の代数閉包は k 上代数的とする。このとき、R 上１変数多項式環 R[X] のネーター部分環 A に対し、A の R 上の特殊ファイバーは常に k 上有限生成である。さらに、R が完備

なら、A 自身が R 上有限生成である。

より一般的な場合の結果として次がある。

定理 ネーター局所一意分解整域 R と R[X] のネーター部分環 A について、次の条件が成り立つとする：

（条件） p が R の素イデアルなら、pA は A の素イデアルである。

このとき、A は R 上有限生成であり、さらに、R の可逆イデアル I が存在して、A の整閉包は R 上 I の対称代数と同型である。

以上の結果に関連して、条件をゆるめた場合、これらの定理が成り立たなくなることを示す様々な例が構成できる。ここでは、主なものをひとつだけ示す。具体例の構成には次の補題を利用する。

補題 (R, π) は DVR で、その商体を K、剰余体を k とする。R ⊂ D ⊂ R[X] をみたすネーター整閉整域 D について、D[π^{-1}]=K[X] であり、さらに πD は D/πD が k 上代数的であるような D の極大イデアルとする。V_1 を R[X] の πR[X] による局所化、V_2 を D の πD による局所化とし、

$$A = K[X] \cap V_1 \cap V_2$$

とおく。また、$P_i = V_i \cap A$ (i = 1, 2) とする。このとき、次が成り立つ。
(ⅰ) A は R[X] のネーター整閉部分環である。
(ⅱ) A は R 上有限生成ではない。

例 **Q** を有理数体とし、R = **Q**[[t]] とする。素数を順に p_1、p_2、p_3、… とし、x_1 = tX、

$$x_{n+1}=(x_n^2 - p_n)/t$$

により x_n を定め、D = R[$x_1, x_2, \cdots$] とおく。このとき、D は上の補題の条件を満たし、従って、補題で定義された A は R 上有限生成ではない R[X] のネーター整閉部分環である。

(3) 目的の 3 に掲げた問題に関しては、L が K 上の超楕円関数体である場合を中心に研究を進め、過去に得た定理を別の視点から捉えなおして別証明を与えることを試み、その結果、L が楕円関数体の場合に、標数が 0 という仮定の下で証明した結果を、2 以外の標数の場合に拡張することに成功した。

以上が期間中に得た成果の概要である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① N.Onoda and T.Sugatani, Accuracy of powers of accurate elements, Toyama Math. J. Vol.31, 59-67, 2008 査読有り
② A.K.Dutta and N.Onoda, On finite generation of R-subalgebras of R[X], J. Algebra, Vol.320, 57-80, 2008 査読有り
③ A.K.Dutta and N.Onoda, Some results on codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibrations, J. Algebra, Vol.313, 905-921, 2007 査読有り

〔学会発表〕（計 2 件）

① 小野田信春、On codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibrations、アフィン代数幾何学研究集会、2008 年 9 月 3 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス
② 小野田信春、On codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibrations over Noetherian normal domains、第 29 回可換環論シンポジウム、2007 年 11 月 20 日、ウェルシティなごや

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

小野田　信春（ONODA NOBUHARU）
福井大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：40169347

(2)研究分担者

(3)連携研究者

[海外共同研究者]

S.M.Bhatwadekar
Tata Institute of Fundamental Research, India, Professor

A.K.Dutta
Indian Statistical Institute, India
Associate Professor