

平成22年4月26日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540019
 研究課題名（和文） 代数幾何学を応用した表現論手法によるカルタン問題を中心とした多元環の研究
 研究課題名（英文） Research of Algebras relating to Cartan Problem by using methods of Representation Theory as an application of Algebraic Geometry
 研究代表者
 佐藤 真久（SATO MASAHISA）
 山梨大学・大学院医学工学総合研究部・教授
 研究者番号：30143952

研究成果の概要（和文）：代数閉体上の有限表現型遺伝多元環上の直既約加群はディンキン図形の正のルートと対応している。負のルートについては、加群上では、何を意味しているのか全く不明であった。本研究により、導来圏の対象と対応させていくことで、加群の複体のホモトピー同値類、即ち導来圏の対象と代数的構造も含めて対応していることがわかった。また、カルタン行列は、導来圏に対する不変量であり、カルタン行列から作られるコクセター行列が、導来圏の対象において、アウスランダー・ライテン変換を与えるものであることがわかった。

研究成果の概要（英文）：The indecomposable modules of a finite dimensional algebra over algebraic closed field correspond to the positive root of Dynkin diagram. But it was not clear what kind of meaning the non-negative roots had. In this research, this becomes clear by corresponding the homotopy class of complexes of modules to negative roots and this preserves its algebraic structure. Also Cartan matrix is invariant on Derived categories and it is shown that Coxeter matrix constructed from Cartan matrix is alternative to Auslander-Reitern translation for Derived category instead of module category.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

1. 研究開始当初の背景
 非可換環論と可換代数（可換環論や代数幾何）では、対象の違いから手法や方法論が異なり、共通の道具がなかった。しかし、導来

圏を考えることで、両者はホモロジー的な対象となり、可換も非可換も区別無く共通の手法で両者の考察が行えるので、導来圏を通して数学的对象の奥底にある深い原理を見い

だして行くことで、数学の大きな進展になると期待されていた。その中で、代数幾何学と非可換代数幾何学の相互補完的な役割に注目し、互いの成果を利用し合うことでより良い成果が得られると期待された。非可換代数幾何学に多元環の表現論で考察された導来圏の結果と融合させ、この中でカルタン行列の役割を更に考察して、多元環の表現論での考察の意味を非可換代数幾何や代数幾何にあてはめて考察することは、新しい発想を生み、方向性の違った結果が出ると期待された。

2. 研究の目的

環論や多元環論の進展に伴い、非可換と可換の分野で共通な対象が扱われるようになっていく。そこで、代数幾何学の研究成果を、導来圏という高度に抽象化された概念を通じて多元環の表現論の結果を共通基盤で結びつけ利用していく。これらの研究を、非可換代数幾何として発展させる。それらと並行して、従来の伝統的な環論や多元環論に、新手法を導入し、より広範な方法論を見いだしていく。興味ある対象として、非可換代数幾何学と代数幾何学および多元環の表現論に共通に出現するフロベニウス環や、ある種の不変量としてのカルタン行列の役割にも注目しながら考察して、非可換と可換の融合を目指した研究を行い、それらに内在する深い数学的原理を見つけていく。

3. 研究の方法

研究会を通じて互いの結果について討論して、研究を推し進めるという方法を中心に研究を行った。環論研究者や他分野の研究者のアイデアを積極的に取り入れる為に、関連研究会に参加し議論を通じて新手法やアイデアを創出していき、更に同分野の研究成果を互いに高め合いながら利用するために、研究会を開催して研究の進展をはかった。これに、海外からの研究者も招聘し、内外の研究者を交えて、海外の成果も取り入れながら研究を行っていった。

- (1) 第5回日中韓環論国際シンポジウムを2007年8月に日本で開催し、多くの研究成果の交流をはかった。幅広い環論の研究成果を共有できるようにワールドサイエンティフィック社から論文集を発行して世界で幅広く研究を行って貰う素地を作った。
- (2) 上記シンポジウムに参加した非可換代数幾何の中国の若手リーダーである復旦大学のWu教授と環論の大家のYao教授を山梨大学に招聘し、研究成果の交流を図るとともに、日中での研究協力の方法について検討し、両国の研究協力を一層推し進める方策をたて、両国で研究を行うことにした。

- (3) 2007年2008年2009年と環論および表現論シンポジウムを開催し、この分野の多くの研究発表を通じて、互いの成果を確認し、互いの研究に成果を取り入れ、より良い研究成果に高めるべく議論を行った。
- (4) 2008年には、中国の復旦大学および南京大学に赴き、研究の交流を行った。非可換代数幾何学と多元環の表現論の関係について活発な議論を行った。
- (5) 2009年度には、北京師範大学からXi教授およびコペルニクス大学からKlemp教授を招聘し、多元環の表現論や群デザインとの研究交流を行い、新たな研究手法の開拓を行った。また、京都大学数理解析研究所で研究集会を主催し、世界の主立った非可換代数幾何研究者を招聘し、講義や研究発表を通じて、非可換代数幾何を日本に普及させ、他分野との積極的な研究交流を行い、多岐にわたって手法を広め或いは他の分野の手法を吸収することに務め、将来の組織的研究による更なる発展の礎を築いた。それを踏まえて、更に信州大学で非可換代数幾何と位相幾何学の専門家を交えて研究集会を開催した。

4. 研究成果

- (1) 多元環の表現論とカルタン行列に関して、従来のカルタン行列の役目を越えた新しい次のような知見を得た。カルタン行列から作られるコクセター行列が、有限表現型の遺伝環の場合に、直既約加群全体のなすA-Rクイバー間のアウスランダー・ライテン変換という表現論で重要な役割をなす変換と一致している。基本ルート系から繰り返りコクセター行列で変換することで全ての正のルートが出現して、それに対応して多元環上の直既約加群が全て得られるが、この過程で同時に負のルートが現れてくる。アウスランダー・ライテンで変換は、負のルートに対応する直既約加群は出現しない。ここが両者の違いで、負のルートは直既約加群とは対応しない正のルートの影である幻の対象と考えられていた。しかし、同来圏を考えると、同来圏が直既約加群の圏を部分圏として含む圏になっており、両者を図形化した有向グラフの点にあたるルートの変換にコクセター行列が自然になっていることが示され、その意味するものが明確になったと言える。この結果は上海（南京大学・復旦大学）で連続招待講演として研究者に紹介された。

- (2) 非可換代数幾何学と多元環の相互に関わる研究成果として、自己入射的な多元環かかわる成果が得られた。可換代数曲面の重要な曲面の分類が、自己入射的な多元環の分類と同一であることが示された。さらに、多元環の表現論の基本道具である有向グラフを用いて、この曲面の構成に成功した。これに関連して、可換環の理論を用いることで、代数幾何学の交叉理論の非対称性に関する結果が得られた。この結果は、米国（ネブラスカ）で開催された可換環論国際会議で研究発表され、専門家から絶賛された。
- (3) アルティン・シェルター多元環に関して、この多元環の表現と代数幾何学の間で多くの成果が得られた。代数幾何学における量子射影空間の分類が、アルティン・シェルター多元環の分類から可能になることが明らかにされ、アルティン・シェルター多元環の分類が行われ、コジュール多元環などの重要な多元環が見いだされた。ここに、多元環論の伝統的な手法や概念を適用し多元環を構成した方法を採用することで、対応する多くの重要な量子射影空間を構成できた。さらに、アルティン・シェルター多元環自身も環論との関係が見いだされ、大局次元有限の多元環の分類と関係していることが明らかとなった。これらの研究結果は米国・韓国共催の数学会講演および日本数学会代数学分科会特別講演として発表された。
- (4) 環論を頂点とし、非可換代数幾何学と多元環の表現論の深い関係を見だし、それらが代数幾何学での曲面の分類と係わりがあることを明確にし、今後の環論や代数幾何学の方向性を与え、これら考察するにあたり、同来圏を対象とすることで、統一的に考察することができることを具体的に示していったことは、これらの分野の研究者が共同して成果を出せる礎を築いたものとして代数学全般に貢献できたといえる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① 佐藤真久、カルタン行列とその周辺の話題について、第 5 4 回代数学シンポジウム報告集、査読無、2009、1-29
- ② Izuru Mori、Quantum ruled surfaces defined by quivers、第 5 4 回代数学シンポジウム報告集、査読無、2009、

65-75

- ③ Izuru Mori、Asymmetry of Ext-groups、J. Algebra 322、査読有、2009、2235-2250
- ④ Izuru Mori、On the classification of decomposable quantum rule surfaces、Ring Theory 2007、査読有、2009、126-140
- ⑤ Masahisa Sato、The work of Tachikawa on Ring Theory in the world、Ring Theory 2007、査読有、2009、8-14
- ⑥ Izuru Mori、Intersection theory over quantum ruled surfaces、J. Pure Appl. Algebra 211、査読無、2008、25-41
- ⑦ Izuru Mori、Co-point Modules over Frobenius Koszul Algebras、Comm. Algebra 36、査読有、2008、4659-4677
- ⑧ Izuru Mori、An Introduction to Non-commutative Algebraic Geometry、Proc. Japan Ring Theory 36、査読無、2008、53-59
- ⑨ Kazunori Nakamoto、The moduli spaces of non-thick irreducible representations for the free group of rank 2、Proc. Japan Ring Theory 36、査読無、2008、55-62
- ⑩ Kazunori Nakamoto、The links of 3-dimensional singularities defined by Brieskorn polynomialss、Math. Nachr. 12、査読有、2008、1777-1790
- ⑩ Izuru Mori、Symmetry in the vanishing of Ext over stably symmetric algebras、J. Algebra 310、査読有、2007、708-729
- ⑪ Izuru Mori、Symmetry in the vanishing of Ext-group、Proc. Japan Ring Theory 35、査読無、2007、79-86

[学会発表] (計 14 件)

- ① 毛利出、Classification problems in non commutative algebraic geometry and representation theory、日本数学会 2010 年年会代数学分科会特別講演、2010 年 3 月 25 日、慶応義塾大学、神奈川
- ② 佐藤真久、カルタン行列とその周辺の話題について、第 5 4 回代数学シンポジウム、2009 年 8 月 3 日、明治大学、東京
- ③ Izuru Mori、B-construction and C-construction、Special Session on Quantum Algebras and Related Topics-Joint Meeting of the AMS and SMS、2008 年 12 月 18 日、Fudan University, Shanghai, China
- ④ 毛利出、Homological Properties of Connected Graded Algebras、空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 2008、2

- 008年9月12日、信州大学、長野
- ⑤ 中本和典、The moduli spaces of non-thick irreducible representations for the free group of rank 2、第41回環論および表現論シンポジウム、2008年9月6日、静岡大学理学部
- ⑥ Izuru Mori、Symmetry and Asymmetry of the Euler Form、Comm. Algebra: Connections with Algebraic Topology and Representation Theory、2008年5月20日、Lincoln, NE, U.S.A.
- ⑦ 毛利出、An Introduction to non-commutative Algebraic Geometry、第5回日中韓環論国際シンポジウム、2007年9月12日、東京・青少年記念オリンピックセンター

[図書] (計1件)

- ① Masahisa Sato、Ring Theory 2007 (Proceedings of the Fifth China-Japan-Korea Conference)、World Scientific Publishers、2009、PP.289

[その他]

ホームページ等

<http://fuji.cec.yamanashi.ac.jp/~sato/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 眞久 (SATO MASAHISA)

山梨大学・大学院医学工学総合研究部・教授

研究者番号：30143952

(2) 研究分担者

毛利 出 (MORI IZURU)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50436903

大貫 洋介 (OHNUKI YOUSUKE)

鈴鹿工業高等専門学校・数学教室・講師

研究者番号：30435432

中本 和典 (NAKAMOTO KAZUNORI)

山梨大学・総合分析センター・教授

研究者番号：30342570