

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540021

研究課題名(和文)

量子群の表現と量子可積分系

研究課題名(英文) Representations of quantum groups and quantum integrable systems

研究代表者：

中西 知樹 (NAKANISHI TOMOKI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：80227842

研究成果の概要(和文)：

ベータ仮説法に起源を持つ関数方程式である T-system および Y-system と 団代数 の 関係 を 明 ら かに し、さら に 団代数 の 定式化 を 用い て、20 年 の 間未解決 で あつ た Y-system の 周期性 および 付随す る dilogarithm 恒等式 の 証明 を 与え た。また、団代数 に 関する さまざまな 定理 および 性質 を 明 らか し た。

研究成果の概要(英文)：

We clarify the relation between cluster algebras and the T- and Y-systems, which are functional equations originated from Bethe ansatz method. Using the cluster algebraic formulation, we prove the periodicities of Y-systems and the associated dilogarithm identities, which have remained as conjectures for twenty years. We also clarify various theorems and properties of cluster algebras.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：無限可積分系

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：量子群、量子可積分系、団代数、団圏、Y-system、T-system、dilogarithm

## 1. 研究開始当初の背景

量子可積分系における中心的な方法としてベータ仮説法がある。数学的には厳密性に欠ける議論が含まれるが、それにより、多くの数学的な帰結や知見が得られてきた。一例として、熱平衡条件である熱力学的ベータ仮説方程式から得られる Y-system やそれに付随する dilogarithm 恒等式が挙げられる。これらの数学的な帰結はその微視的な量子群構造とはある意味独立にまたさまざまな代数

構造を持つことが知られている。このようなベータ仮説の数理に関するさまざまな視点からの包括的な研究を行うことは大変興味深くかつ重要な問題である。

## 2. 研究の目的

本研究の当初の目的は、q 指標と有限結晶基底という量子群の表現論的問題と、スピン鎖型の量子可積分系におけるベータ仮説法と

の関連をお明らかにすることであった。

2007年度の研究において団代数とのベータ仮説法との関連の重要性が明確になってきたため、2008年度以降は、さらに、Q-system、T-system、Y-system、団代数、団圏、トポシカル幾何、双曲幾何を含めた「ベータ仮説」を構成する世界のより包括的な理解を目指した。

### 3. 研究の方法

可積分系模型に起源を持つ様々な具体的数理現象とその背後にある量子群や団代数などの代数的構造の双方の側面からの研究を行うことにより、可積分模型においては数学的に厳密な定式化と証明を目指し、また一方、代数的構造においては新現象の発見とその証明を目指し、相互に研究を進展させる方法を採用する。

### 4. 研究成果

本研究において、ベータ仮説法に起源を持つ関数方程式である T-system および Y-system と団代数の関係を明らかにし、さらに団代数の定式化を用いて、20年の間未解決であった Y-system の周期性および付随する dilogarithm 恒等式の証明を与えた。また、団代数の周期に付随する dilogarithm 恒等式を古典および量子の場合に定式化し、またその間の関係(半古典極限)を明らかにした。その他、さまざまな団代数に関する定理および性質を明らかにした。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- [1] W. Nakai, T..Nakanishi, On Frenkel-Mukhin algorithm for  $q$ -character of quantum affine algebras, to appear in Advanced Studies in Pure Math. 査読有
- [2] R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, J. Suzuki, T. Nakanishi, Periodicities of T-systems and Y-systems, Nagoya Math J. 197 (2010), 56-174. 査読有
- [3] A. Kuniba, T..Nakanishi, J. Suzuki, T-systems and Y-systems for quantum affinizations of quantum Kac-Moody algebras, SIGMA 5 (2009), 108, 23 pages. 査読有

- [4] T..Nakanishi Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: simply laced case, to appear in Nagoya Math. J. 査読有
  - [5] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, T..Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type  $B_r$ , to appear in Publ. RIMS. 査読有
  - [6] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, T..Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types  $C_r$ ,  $F_4$ , and  $G_2$ , to appear in Publ. RIMS. 査読有
  - [7] T..Nakanishi, T-systems, Y-systems, and cluster algebras: Tamely laced case, In Proc. Of the Infinite Analysis 09, New Trends in Quantum Integrable Systems, eds. B. Feigin, et al., World Scientific, Singapore, 2011, pp.325-355. 査読有
  - [8] T..Nakanishi, R. Tateo, Dilogarithm identities for sine-Gordon and reduced sine-Gordon Y-systems, SIGMA 6 (2010) 085, 34 pages. 査読有
  - [9] T..Nakanishi, Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities, to appear in Representation of Algebras and Related Topics, Proc. Of ICRA XIV, Tokyo, 2010. 査読有
  - [10] A. Kuniba, T..Nakanishi, J. Suzuki, T-systems and Y-systems in integrable systems, J. Phys. A: Math. Theor. 44 103001 (146pp). 査読有
  - [11] R. Inoue, T..Nakanishi, Difference equations and cluster algebras I: Poisson bracket for integrable difference equations, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu. 査読有
  - [12] T..Nakanishi, A. Zelevinsky, On tropical dualities in cluster algebras, to appear in Contemp. Math. 査読有
- [学会発表] (計17件)
- [1] 日本数学会年会、東大、2009年3月、T-systemの周期性について (with Inoue, Iyama, Kuniba, Suzuki)

- [2] Workshop: Representation Theories of Algebraic and Quantum Groups, 和歌山県勝浦市, 2009年5月、Periodicity of T-systems
- [3] Workshop: Satellite seminar on workshop "Triangulated Categories and Related Topics", 名大、2009年7月、T-systems, Y-systems, and cluster algebras
- [4] Workshop: Infinite Analysis 09 - New Trends in Quantum Integrable Systems, 京大、2009年7月、Periodicity of T-systems
- [5] Workshop: Integrable systems and their applications, はこだて未来大、2009年8月、Periodicity of T-systems
- [6] Workshop: Topics on q-deformed symmetric polynomials, 静岡県裾野市、2009年9月、T-systems, cluster algebras, and cluster categories
- [7] Conference: Advanced School and Conference on Homological and Geometrical Methods in Representation theory, トリエステ, 2010年1月、Periodicities in cluster algebras and cluster categories from quantum groups
- [8] 日本数学会年会, 慶応大、2010年3月、Dilogarithm identities and cluster algebras,
- [9] 日本数学会年会, 慶応大、2010年3月、T and Y-systems, dilogarithm identities and cluster algebras: nonsimply laced case, (with Inoue, Iyama, Keller, Kuniba)
- [10] Workshop: Quantum groups and quantum topology, 京大、2010年4月、Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras.
- [11] Workshop: Infinite Analysis 10: Developments in quantum integrable systems, 京大、2010年6月、Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras.
- [12] Workshop: Representation theory of algebraic groups and quantum groups '10, 名大、2010年8月、Dilogarithm

identities in conformal field theory and cluster algebras.

- [13] Workshop: Quantum dilogarithm & quantum Teichmüller theory, オーフス、2010年8月、Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras.

- [14] Workshop: Symposium on Algebra, 北大、2010年8月、Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras.

- [15] Workshop: XIV International conference of representations of algebras and workshop, 東京、2010年8月、Periodic cluster algebras and dilogarithm identities.

- [16] Conference: 日本数学会, 名大、2010年9月、Periodic cluster algebras and dilogarithm identities..

- [17] Workshop: Algebraic and geometric aspects of discrete integrable systems - integrable systems and cluster algebras, 東大、2010年12月、Discrete systems and cluster algebras I. General T-systems and Y-systems.

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

○取得状況 (計◇件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中西 知樹 (NAKANISHI TOMOKI)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准  
教授  
研究者番号：80227842

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：