

平成21年 5月 8日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540023

研究課題名 (和文) ホッジ加群の理論の代数幾何における新たな応用について

研究課題名 (英文) New applications of the theory of Hodge modules to algebraic geometry

研究代表者

齊藤 盛彦 (SAITO MORIHIKO)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10186968

研究成果の概要：代数幾何学の基礎の一つであるホッジ加群の理論とは、グロタンディック・ドリーニュらによってヴェイユ予想の解決の為に創られた理論に標数0の世界において対応する物として元来発見されたのであるが、その応用については基本的なものを除いては未だ十分に研究され尽くされているとは言えない状態にある。そこでホッジ加群の応用について研究を行い、それがネロン模型の一般化やチャウ・キュネット分解等の研究に有効である事を示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ホッジ加群、ネロン模型、認容法函数、スペクトラム、消滅輪体、チャウ・キュネット分解、交叉コホモロジー、超平面配置

1. 研究開始当初の背景

ホッジ加群の理論とは、ヴェイユ予想を解決する為にグロタンディックが創始し、更にドリーニュらによって発展させられて来た

エタール混合層の理論に対し、標数0において対応すべきものとして導入されたのであるが、これらの理論はそれ自身正確な理解を得るのにかなりの時間と労力を必要とする

こともあって、代数幾何における応用が十分に為されているとは言い難い状態にある。ホッジ加群について言うと、基礎的論文が出てから約20年が経過した現在でも、ホッジ加群を使って証明された定理をそれを使わずに証明したと称する論文がかなりいい雑誌から出版される等、かなり芳しくない状況にあると言える。

2. 研究の目的

例えば代数サイクルの変形に付随した無限小不変量がサイクルのコホモロジー類と本質的に同値なことを対数的微分形式とホッジ加群を用いることにより証明した論文等を見ても明らかな様に、ホッジ加群を使うと使わないとではできる事に多少とも差が表れて来るものである。そこで内外の研究者たちとの討論を通じてホッジ加群の理論の代数幾何における新たな応用を発見することが本研究の目標であった。

3. 研究の方法

内外の共同研究者たちとの討論を通じて、現在かなり興味をもたれている問題で、かつホッジ加群の理論を有効に使いそうなものを探る事が肝心となる。更にこの問題に対して、ホッジ加群の理論をどの様に適用させることが出来るかも鍵になる。具体的には様々な研究集会に参加して、個人的に議論を重ねる事によりアイデアが得られた事も多い。

4. 研究成果

(1) 底空間が1次元の場合のグリーン・グリフィス・ケールによるネロン模型の理論をブロスナン・パールシュタインとの共同研究により高次元に拡張した。これは、筆者が10年以上前にした仕事の精密化であり、グリフィスの弟子が行っていた底が高次元で無限

遠因子が正規交叉のアーベル多様体の族の場合への一般化を遥かに凌駕するものである。ここでホッジ加群の理論は本質的役割を果たしている。この仕事は未だ完結しておらず現在も尚進行中である。

(2) 上記のグリーン・グリフィス・ケールによるネロン模型のハウスドルフ性を無限遠因子が滑らかな場合に証明し、系として認容法函数の零点の解析性をこの場合に証明した。最後の結果はブロスナン・パールシュタインによって底が1次元の場合の彼らの結果を拡張する事により殆ど同時に別証明が与えられた。

(3) カナダ・バンフの研究集会において話題となったホッジ類の超曲面切断への制限に関するトーマス理論について研究を行い、消滅輪体間の関係に付随したグリフィス輪体の一般化等を使う事によりその精密化を得た。これは、特異点が孤立していない場合には、ホッジ加群の理論を使わずに証明する事は殆ど不可能である。

(4) 認容法函数にコホモロジー類を対応させる写像について研究し、それが全射でない例を構成した。これは上記のトーマス理論の精密化と関係しているところであるが、これがホッジ予想の反例に直ちにつながる事はない模様である。

(5) チャウ・キュネット分解の一般化について錐束、即ちファイバーが2次曲線の写像の場合にヤン・ナーゲル氏と共同研究を行い、分解の射影子を具体的に構成する事に成功した。これは、フランスのボーヴィルが30年位前に彼の学位論文において得た、錐束のチャウ群に関する結果を更に精密化したも

のであるが、ここでは発見的考察においてホッジ加群の理論が本質的な役割を果たした。

(6) ニース大学のディムカ、メゾノーブの両氏との特異点のスペクトラムに関する共同研究を行い、スペクトラムの定義を完全交叉とは限らない一般イデアルの場合に拡張し、さらに単項イデアルについては具体的な計算公式を得る事に成功した。これは、 b -函数や乗数イデアルが一般イデアルの場合に定義されている事から、予想されて当然の事ではあるが、ホッジ加群の理論を本質的に使う事なしには不可能だったものである。現在はこれを更に、完全交叉でない曲面の特異点の場合に計算する事を目指している。

(7) 一般ファイバーが非特異な函数の消滅輪体についてディムカ氏との共同研究を行い、それが多様体の特異点についてもかなりの情報を含んでいる事を示し、疑似半安定退化の場合の消滅輪体の計算なども行った。これは、グリフィス、グリーン、ケールの論文において特殊な場合に行われた計算を、完全に一般化するものである。

(8) ゲルノーブル大学のクリス・ペータース氏との共同研究においては、ホッジ構造の変形に付随した交叉コホモロジーと普通のコホモロジー上のウェイト・フィルトレーションとの関係を証明した。これは、かつて筆者が証明した交叉コホモロジーの純性定理から当然期待されるもので、多様体が代数的な場合には実際ホッジ加群のウェイトの一般論から比較的容易に導き出されるが、代数的でない場合にはホッジ複体の理論が必要になるなど、かなりの技術的困難を伴う。

(9) 跳躍係数やスペクトルに関してはブド

ール氏との共同研究を行い、超平面配置の場合に組合せ論的な量からそれらを計算する公式を次元が低い場合に得た。現在は更にディムカ氏も加わって、超平面配置のミルナー・コホモロジーの組合せ論的記述に関する研究を行っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① Chris Peters, Morihiro Saito
Lowest Weights in Cohomology of Variations of Hodge Structure, to appear in Nagoya Math. Journal (査読有)

② Jan Nagel, Morihiro Saito
Relative Chow-Kunneth decompositions for conic bundles and Prym varieties, to appear in Intern. Math. Research Notices (査読有)

③ Morihiro Saito
On b -function, spectrum and multiplier ideals, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics (査読有)

[学会発表] (計7件)

① Morihiro Saito,
Cycles evanescents d'une fonction dont la fibre generique est lisse,
Singularites et applications
2008年11月7日, Nice, France

② Morihiro Saito,
Conjecture de Hodge et cycles evanescents,
Singularites et applications

2008年11月7日, Nice, France

③ Morihiko Saito,

Hausdorff property of the Zucker
extension, Hodge Theory

2008年4月7日, Banff, Canada

④ Morihiko Saito,

Sur la b-fonction, le spectre et les ideaux
multiplicateurs d'une fonction,

Singularites et geometrie complexes

2007年9月26日,

University of Nancy, France.

⑤ Morihiko Saito,

On b-function, spectrum, and multiplier
ideals,

Niigata Workshop on Complex Geometry and
Singularities

2007年8月22日, 新潟

⑥ Morihiko Saito,

On b-function, spectrum, and multiplier
ideals,

Algebraic Analysis and Around in honor of
Professor Masaki Kashiwara's 60th
birthday

2007年6月28日, RIMS 京都

⑦ Morihiko Saito,

Spectrum, b-function, and multiplier
ideals,

Geometry Days In honour of Joseph
Steenbrink on his 60th birthday

2007年6月2日,

Radboud University, Nijmegen, Netherlands

(1) 研究代表者

斉藤 盛彦 (SAITO MORIHIKO)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号: 10186968