様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２８日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：　2007～2009
課題番号：１９５４００２４
研究課題名（和文）楕円コホモロジーと楕円カラビ・ヤウ多様体の数え上げ幾何：弦双対性の理解を目指して
研究課題名（英文）Elliptic cohomology and the enumerative geometry of elliptic Calabi-Yau manifolds: Towards the understanding of string dualities

研究代表者
　河合　俊哉（KAWAI TOSHIYA）
　京都大学・数理解析研究所・准教授
　研究者番号：２０２９３９７０

研究成果の概要（和文）：量子重力を含む物理理論の候補としての超弦理論には不思議な双対現象があることが知られている。これを定量的に理解するためには内部空間の Calabi-Yau 多様体の数え上げ幾何と我々の住む時空での物理状態の数え上げとを関連付ける必要がある。本研究は特に楕円 Calabi-Yau 多様体の場合に楕円コホモロジーの概念を手助けにこの作業を遂行しようと努力したものである。特に関係する生成関数に関して Borcherds 積とのアナロジーを追求しながら具体的かつ組織的に構成してその性質を調べた。この成果は当研究者としては大いに満足すべきもので、これを論文としてまとめる作業に取り掛かったのであるが、予想以上に手間がかかり、不本意ながら期間内に完成するまでには至らなかった。しかし、周辺話題や主題に利用する技術的な結果は公表することができた。

研究成果の概要（英文）：There are mysterious dualities among superstring theories, unified theories including quantum gravity. To make quantative investigation of them we need to relate enumerative geometry of internal Calabi-Yau manifolds with the BPS state counting. The aim of the present research has been to make progress in this direction with the aid of elliptic cohomology and an analogy to Borcherds products by focusing our attention to the cases of elliptic Calabi-Yau threefolds. We have systematically constructed the relevant Borcherds-like products and investigated their functional properties and the consistency with the expectation from enumerative geometry. Unfortunately, the research was not fully completed within the given period to the level of writing up an article despite all the encouraging results we obtained so far. However, we were able to publish loosely related or technical results to be used for the main purpose of this research.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
平成１９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
平成２０年度	900,000	270,000	1,170,000
平成２１年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数理物理・代数幾何・素粒子論

１．研究開始当初の背景

近年において場の理論や弦理論との関係で数え上げ幾何は著しい発展を遂げている。典型的な設定は以下のようである。多様体Mを我々の４次元時空、Xとして実６次元（複素３次元）のCalab-Yau多様体とする。すなわちM←M×X→Xという図式がある。(矢印は自然な射影。）超弦理論の立場からは元々M×X上にあった理論をXで「コンパクト化」してM上の理論を得るという訳である。当然ながらM上の物理的研究対象（ゲージ場、物質場、重力場など）はXの幾何学的情報と密接に関係している。M上の物理理論にはBPS状態と呼ばれる特別な状態があり、これはX上の安定層（物理の用語では安定D-brane)と対応していると期待される。したがって、BPS状態の数え上げ問題は安定層の数え上げ問題と等価の問題になる。またある特殊な状況の元ではこのようなXの安定層の数え上げ問題は別種の数え上げ幾何の問題として近年盛んに研究されているGromov-Witten理論と等価であろうという状況証拠が積み上がって来ている。

以上の様なシナリオが最も上手くいっているのはXとしてトーリック曲面の標準束の全空間としての開Calab-Yau多様体を選んだ場合で、このときにはトーラス作用による局所化を使うことにより数え上げ幾何は完全に制御できる。対応するMの物理はN=2超対称ゲージ理論でこれはNekrasovにより、インスタントンのモジュライ空間上のトーラス作用による局所化によりやはり完全に分かっており、Xの数え上げ幾何の結果と一致することが検証されている。しかしながら、Xとしてこのような開Calab-Yau多様体に限ってしまうと、M上の物理がゲージ理論のみになり、重力の量子化は全く考慮されない。これでは、そもそも弦理論を考える動機が失われてしまう。したがって、最も興味があるのはXがコンパクトな場合であり、そのときにのみ、M上の物理に量子重力が登場し、またアノマリー相殺等の面白い物理現象が議論できるのである。一方、Xがコンパクトな場合の数え上げ幾何は格段に難しい（しかし問題意識としてはこちらの方がはるかに古い)。最早、トーラス作用による局所化というテクニックは有効でないからである。何か別のアプローチが必要であると思われるが、そのようなものを見つけて前進できないかと言うのが本研究を始めた大きな動機であった。

２．研究の目的

当研究者はこれまでの研究においてXがコンパクトな場合を想定して、上記の問題意識のもとに研究を進めてきたが、直接的な動機は以下のようであった。１５年程前にHarvey-Mooreはある特殊な状況においてBPS状態の数え上げ問題がBorcherds積と関係しそうだということを指摘した。Borcherds積はIV型対称領域上の保型形式をヤコビ形式を種として無限積の形で構成するというものであった。これはXとしてK3ファイバー構造を有する場合にファイバー方向のみの数え上げ幾何を考慮していることにより、Borcherds積（もどき）が現れているものと容易に想像された。またXがこのような特別なCalabi-Yau多様体の場合には、弦双対性を認めれば、混成弦の（摂動的）BPS状態の数え上げ問題に帰着し、それゆえBorcherds積におけるヤコビ形式に相当するものを求めることは楕円曲線上の共形場の理論の問題に帰着しそうであった。また、この数え上げ問題はXの（ファイバー方向の）種数0のGromov-Witten理論とも関係しそうであった。このような結果を眺めていると以下のような自然な問が浮かんで来る。

（1）Xが一般のコンパクトCalabi-Yau多様体の場合にBPS状態の数え上げ問題は何らかの意味でBorcherds積を拡張した無限積と関係するか？（この問が正しいとしてこのような無限積をオイラー積との類推から以下ではBPSゼータ関数と呼ぶことにする。）

(2) BPSゼータ関数はX上の安定層に対する数え上げ幾何と関係しているはずであるがGromov-Witten理論と関係するのはいかなる場合で、両者の等価性は議論できるか？

(3) Xが楕円ないしK3ファイバー構造を有する場合に、ファイバー方向の数え上げ幾何に相当するBPSゼータ関数の部分積を明示的に求めることができるか？

これらの疑問に部分的にせよ答えることが本研究の目的であった。

一方、超弦理論には神秘的な双対性が存在することがよく知られており、これを定量的に検証し、その存在理由を解明することも重要である。そのためにも X がコンパクトな場合の研究が大事であると考えられ、上記の問題は手がかりを与えると考えた。

３．研究の方法

X を一般にしていては、難しくてなかなか研究が進展しない。しかし、X として楕円 Calabi-Yau 多様体の場合を考えると、物理的には F 理論を X にコンパクト化した理論が関係してきて、諸々の物理的知識を使うことができる。このことを助けにして Borcherds 積の類似物をとにかく具体的かつ組織的に構成してみるというアプローチを採用してみた。これはほぼ満足すべき状態まで研究が進んだ。

この作業の過程で数学的には一般コホモロジー、特に楕円コホモロジーの考えも重要であろうと考えていたが、実際役に立った。

また明示的な表式が得られるとすれば、それから関数等式、保型性も調べることが出来、その幾何学的な意味も探求できるかもしれないと考えた。当初は果たしてこの期待に沿うほど話が進むかどうか半信半疑であったが、結局技術的な問題がうまく乗り越えられることが分かり、現在も研究がはかどっている。

更に、具体的な表式と純粋に数え上げ幾何のアプローチから期待される結果との整合性も調べることにした。これは数え上げ幾何の難しさから極く僅かしか検証できていないが、それでも非自明な結果が得られている。

また Borcherds 積は時により分母公式の類似ともみなせることから、その類似物として構成した積に関しても表現論的意味合いを知りたくなる。これに関してはあまり研究が進んでいないが具体的な積の構成では表現論的な要素が多く入り込んでおり極めて示唆的である。

４．研究成果

以上の目論見は紆余曲折があったが現段階でかなり満足すべき段階まで進展しており、特に積の組織的構成やその保型性、楕円コホモロジーとの関係、F 理論の持つ物理的性質との関係、並びに数え上げ幾何から期待されることとの整合性等の理解が大幅に進み、成果を論文としてまとめる作業にも取り掛かった。しかし、研究対象は豊富な数学的、物理的内容が絡み合っているためであるが、論文原稿を作成する作業に手間取り、不本意ながら期間内に完成させるまでには至らなかった。現在もこの方向での作業を鋭意進めている次第である。

一方数え上げ幾何との整合性の検証を念頭に置いた関連した技術的問題として、結節点および尖点を持つ曲線上の渦のモジュライ空間のオイラー標数を計算した。この結果と Gopakumar-Vafa 予想との整合性を議論し、これを Abelian Vortices on Nodal and Cuspidal Curves という題の論文にまとめた。この結果は現在準備中の論文で利用される予定である。

また、問題意識としては本研究の主題とは独立した話題ではあるが技術的には近い次のような課題にも取り組んだ。

N=2 超共形場の理論に対して当研究者を含めこれまでよく考えられてきた楕円種数を Heisenberg 群の作用で twist するという問題を一般的に考察し、副産物として特に Witten による古い予想の証明をするとともに五重積公式の ADE 拡張を証明した。またかなり以前に当研究者が観察していたある種の双対現象も自然に理解できることが分かった。この結果は Twisted Elliptic Genera of N=2 SCFTs in Two Dimensions という題でプレプリントとして公表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① <u>Toshiya Kawai</u>, *Abelian voritices on*

noadal and cuspidal curves, Journal of High Energy Physics, 11 (2009) 111（査読有）

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

６．研究組織

(1)研究代表者

河合　俊哉（KAWAI TOSHIYA）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：20293970