様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月　28 日現在

研究種目： 基盤研究（C）
研究期間： 2007～ 2009
課題番号： 19540028
研究課題名（和文）　Koszul 双対性の可換環論への応用
研究課題名（英文） Application of Koszul duality to commutative algebra

研究代表者
柳川 浩二（YANAGAWA KOHJI）
関西大学・システム理工学部・准教授
研究者番号： 40283006

研究成果の概要（和文）： 代表者は以前より、「Koszul 双対性」など導来圏の理論を、組合せ論的可換代数の問題に応用してきた。その手法を、一般の可換環の研究に活かすことが当初の目的であった。この方向で、環の連接性等と関連した成果を得て、2009 年に学術誌に発表した。2008 年頃からは、若干方針を転換し、組合せ論的可換代数の対象ではあるが、やや定義が緩く(一般の環に近く)従来の手法が使えないものの研究に移行した。この方向では、数本の論文を書き、一部は出版済である。

研究成果の概要（英文）: The author has been applied the theory of derived categories (e.g., Koszul duality) to the study of combinatorial commutative algebra. The main aim of this research project was to extend this idea and results to general commutative algebra. In this direction, results related to the coherent property of rings were obtained, and the paper was published in an academic journal in 2009. Around 2008, the author slightly changed the direction of the research, and begun to study relatively new objects of combinatorial commutative algebra for which we cannot use usual methods. In this direction, the author has written several papers. Some of them have been published in an academic journal.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	900,000	270.000	1,170,000
2009 年度	900,000	270.000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目： 数学・代数学
キーワード：組合せ論的可換代数、Stanley-Reisner 環、アファイン半群環、導来圏、
Koszul 双対性

１．研究開始当初の背景

研究代表者は、2002 年頃から、組合せ論的可換代数に、導来圏や構成可能層の理論を応用することで一連の研究を行ってきた。本研究課題を申請した 2006 年の時点では、

Stanley-Reisne 環やアファイン半群環を対象としたオーソドックスな場合については、このスタイルが一応の完成を迎えつつあり、新たな方向性を模索していた。
2006 年以前に得ていた結果のうち顕著なものの一つとして、多項式環と外積代数の有限生成次数付加群の導来同値である **Bernstein-Gel'fand-Gel'fand** 対応（略して BGG 対応。課題名に登場する **Koszul 双対性**の古典的な例）の Stanley-Reisner 環の理論への応用があった。ここで得られた手法を、より一般の次数付可換環の研究に応用することが、当初の構想であった。
また、こうして得られた結果の、組合せ論的可換代数へのフィードバックも期待された。

２．研究の目的

当該研究課題の基本的な方向性は、上の「背景」の項目で述べた。具体的な問題・目標として当初考えていたものは以下の通り。

(1) 体上の多項式環の次数付イデアルの **(Castelnuovo-Mumford) regularity** は、代数幾何学と計算可換代数(グレブナー基底の理論など)、双方からの興味により、この 20 年間、活発に研究されてきた。Koszul なネーター可換環の regularity は、(上記のものと密接に関連しながらも)若干趣味的な話題であるが、幾つかの先駆的な仕事はあった。
2006 年当時、代表者は、Stanley-Reisner イデアルの regularity について、BGG 対応を応用した研究を行っていた。ここで得られた手法やアイデアを、より一般の次数付イデアルや Koszul(ネーター)可換環の regularity の研究に応用することを目指した。

(2) Koszul 可換環上で Koszul 双対性を考えるとき、環の完全交叉性が自然に登場する。この環については、Avramov や Roos による位相幾何学(ホモトピー論)を用いた強力な理論が古くから知られている。代表者の視点で、彼らの理論を捉え直すことを目指した。

(3) 上述の(1)や(2)に取り組む過程で得られたアイデアを自然に紡いで行くことで、新たな問題への発展、特に、代表者の本来の興味の中心である組合せ論的可換代数への応用を目指した。

３．研究の方法

「目的」欄で挙げた 3 つの項目それぞれについて、上の番号付け (1)～(3)を用いて、個別に述べる。

(1) については、研究主題の Koszul 双対性(を、可換環に特化したもの)が、そのまま研究方法とも言える。本研究に特徴的な手法としては、Herzog, Iyengar, Römer らによって導入された不変量 **linearity defect** や、Brodmann らによる次数付加群の regularity の不等式を用いている。特に後者は、計算可換代数の結果であり、今回のようなホモロジー代数寄りの研究に用いられることは、極めて稀である。

(2) については、(ある程度、予測していたことではあるが)やや不完全に終わり、情報収集や意見交換を行ったのみ。

(3) については、充実した結果が得られた。**toric face ring** や **simplicial poset** の **face ring** など、組合せ論的可換代数の(比較的新しい)対象でありながら、従来の手法が使い難いものを扱った。これらの環自身、研究対象であると同時に、研究手段とも言える。これらの研究の一部は、当時大阪大学の大学院生であった岡崎亮太氏との共同で行った。

４．研究成果

ここでも、「目的」の項での番号付けに従って個別に述べる。なお、本課題開始以前に(概ね)完成していながら、学術雑誌への発表が、本課題の期間中にずれ込んだ論文については、解説しない。

まず、(1)の方向性について。可換非可換を問わず、Koszul 環 A 上の次数付加群 M に対し、regularity (reg M と記す)と linearity defect (ld M と記す)という 2 つの不変量が定義される。前者は、A が多項式環の場合には、代数幾何学的な興味からも深く研究されている著名なもの。後者は、前者の双対ともいえる概念で、導入されたのは比較的最近である。M が有限生成であっても、reg M や ld M の有限性は非自明である。A が可換(ネーター)の場合、reg M は常に有限だが(Avramov-Eisenbud)、ld M はそうとは限らない。
全く一般の Koszul 環で reg や ld を考えると漠然とし過ぎるので、可換な Kosuzl 環 A とその quadratic dual 環 $A^!$ (これも Koszul だが、非可換となる。また、A がネーターでも、$A^!$ はネーターにならないことが多く、これが事態を難しくしている)に絞って考察した。多項式環 S は Kosuzl 環であり、$S^!$ は外積代数 E となる。E 上の有限生成次数加群 M に対し、ld M が常に有限であ

ることは、Eisenbud らによって証明されている。なお A 上と $A^!$ 上の次数付加群の圏の導来圏の圏同値を与えるのが Koszul 双対性であり、これの S と E に関する場合が、BGG 対応である。

論文②(下記[雑誌論文]欄を参照)では、Eisenbud らの上述の結果を一般化し、次の結果を得た。以下、A は Koszul ネーター可換環とする。ただし、A_0 は体と仮定。

① $A^!$ 上の有限生成次数付加群 M に対し、$\{\dim M_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ が有界ならば $\mathrm{ld}\, M$ は有限。

② A が完全交叉ならば、$A^!$ 上の有限生成次数付加群 M に対し、$\mathrm{reg}\, M$、$\mathrm{ld}\, M$ ともに常に有限。

③ A 上の任意の有限生成次数付加群 M に対し $\mathrm{ld}\, M$ が有限であるための必要十分条件は、$A^!$ 上の任意の有限表示次数付加群 N に対し $\mathrm{reg}\, N$ が有限であることである(なお、この場合、$A^!$ は連接となる。)

①を書き上げた後は、この方向の研究から、離れていたが、最近 Iyengar-Römer が、傾向の似た研究を行った。ここからヒントを得て、さらなる継続を目指すことも、将来的には考えている。

(2)については、(3)の方向性が好調で、そちらに研究が大きくシフトしたこともあり、まとまった成果を挙げることが出来なかった。ただ、この題材は、そもそも将来の展望を見込んだ情報収集の面があり、今回の事態も想定の範囲ではある。今後、新しい着想が得られれば、この話題の研究を再開したい。

(3) については、4 本の論文を執筆したが、うち幾つかは 2010 年に入って完成したこともあり、3 本は現在、投稿中(査読中)である。

まず、この方向での研究の端緒として、岡崎亮太氏との共同研究で、toric face ring の双対化複体の簡潔な記述を得た。この環は、組合せ論的可換代数の代表的な研究対象である Stanley-Reisner 環とアファイン半群環の双方の一般化となっており、(基本的なアイデアとしては)Stanley により 80 年代後半に導入されている。その後、半ば忘れられた状態にあったが、比較的最近になって、トーリック・イデアルのグレブナー基底の理論との関連が指摘され、Bruns や Römer らによって、少しずつ研究され始めている(“toric face ring” と名付けたのも、彼らである)。

今回得られた結果は、下記[雑誌論文]欄の①に、まとめられた。Koszul 双対性とは直接には無関係ながら、導来圏を用いている。また、この環は、通常の意味での次数付環ではない為、組合せ論的可換代数の常套的手法が使えない。その意味で、「より一般の環を扱う」という、本課題の趣旨に沿ったものと言える。

主定理の一つである、双対化複体の記述は、Stanley-Reisner 環やアファイン半群環の場合のよく知られた結果の自然な一般化であり、当然予想されるものである。ただ、上述の通り、次数付環ではないため、証明は一筋縄ではなかった。また、代表者の以前の結果である、Stanley-Reisner 環やアファイン半群環の局所双対性(双対化複体が与える双対性)が、対応する胞複体上の構成可能層の Poincaré-Verdier 双対性を与える、という原理が、ここでも成立することを示した。

上とよく似た研究であるが、simplicial poset P の face ring A_P についても、双対化複体の簡潔な(toric face ring 等と同様の)記述を得て、 論文“Dualizing complex of the face ring of a simplicial poset”(投稿中) にまとめた。Poincaré-Verdier 双対性との対応についても、toric face ring 等と同様の結果を得ている。

simplicial poset の face ring (以下、A_P と記す)は、Stanley-Reisner 環の一般化であり(ただし、一般化の方向性は、toric face ring とは ある意味で逆)、後者が有限単体的複体に付随するのに対し、A_P は、ある種の有限胞複体に付随する。この環も、Stanley により、組合せ論的興味から構成されていたが、枡田幹也氏らにより、トーラス多様体の同変コホモロジー環が、A_P の構造を持つことが示され、注目されている。

toric face ring とは異なり、A_P は、次数付環である為、組合せ論的可換代数の従来の手法が、(間接的に)使用でき、証明は比較的楽であった。しかし、応用面では A_P の方が有望で、当該論文でも、村井聡・寺井直樹両氏の、(S_r) 条件を満たす Stanley-Reisner 環の h-列に関する最近の結果の一つが、そのまま成立することを示している。

さらに、 “Higher Cohen-Macaulay property of squarefree modules and simplicial posets”(投稿中) では、上述の toric face ring や face ring A_P に関する結果の応用編で、これらの環を与える胞複体の l-Cohen-Macaulay 性(l は正整数)について扱っている。Floystad が 2007 年発表の論文で与えた手法に基づいているが、この論文は、代表者の 2000-2004 年頃の研究の影響を受けている。この時期の代表者の研究は、一時やや行き詰っていたのであるが、上記(1)の路線の研究で視点を切り替えられたことと、今回のように他の研究者からの刺激を受けたことで、再び活性化しつつある。

上記の流れからやや離れるが、岡崎亮太氏との共同で、多項式環の単項式イデアルやその剰余環の **Stanley depth** を研究した。これは、Stanley が 1982 年発表の論文で導入したもので、有限生成次数付加群に対して純粋に組合せ論的に定義される不変量(ただし、具体的に値を求めるのは非常に困難)であるが、環論的・ホモロジー代数的に定義される通常の depth 以上の値を取ることが予想されている(Stanley 予想)。この話題の研究は、長らく特段の進展が無かったが、2003 年になって、 Apel が(余)次元の低い場合や generic および cogeneric な単項式イデアルやその剰余環(の一部)について当該予想を証明したことで、改めて注目され始めた。現在では、Herzog とその協力者によって精力的に研究されている他、一部の応用数学者からも興味を持たれている。なお上述の「generic および cogeneric な単項式イデアル」は、90 年代半ばに Sturmfels らによって定義された組合せ論的なクラスで、その理論の整備には(当時の)代表者も若干貢献している。

岡崎氏との、この話題に関する共著論文 “Alexander duality and Stanley depth of multigraded modules”(投稿中)は、Stanley 予想にアプローチするための道具立てを揃えるという趣旨のもので、E. Miller の positively t-determined 加群の理論、特に、それらの間の Alexander 双対性を組織的に用いており、Soleyman Jahan の最近の仕事の自然な拡張となっている。具体的な結果としては、cogeneric な単項式イデアルによる剰余環に対して Stanley 予想を証明した。これは、かなり強い仮定を付加した場合に、Apel によって証明されていたもので、今回その仮定を取り除いたことになる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① Ryota Okazaki, <u>Kohji Yanagawa</u>, “Dualizing complex of toric face ring”, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, Vol.196, 2009, pp.87-116.
② <u>Kohji Yanagawa</u>, “Linearity defect and regularity over a Koszul algebra”, Mathematica Scandinavica, 査読有, Vol.104, 2009, pp.205-220.
③ <u>Kohji Yanagawa</u>, “Notes on C-graded modules over an affine semigroup ring $K[C]$”, Communications in Algebra, 査読有, Vol.36, 2008, pp.3122-3146.
④ Ryota Okazaki, <u>Kohji Yanagawa</u>, “Linearity defects of face rings”, Journal of Algebra, 査読有, Vol. 314, 2007, pp. 362-382.

〔学会発表〕（計７件）
① <u>Kohji Yanagawa</u>, “On the face ring of a simplicial poset”, The 5th joint Japan-Vietnam join seminar on Commutative algebra, 2010 年１月８日, ハノイ数学研究所
② <u>柳川浩二</u>, “Homological approach to the face ring of a simplicial poset”, 第 42 回 環論および表現論シンポジウム, 2009 年 10 月 10 日, 大阪教育大学
③ <u>柳川浩二</u>, “Recent topics on derived categories in combinatorial commutative algebra”, 研究集会 Syzygies of Projective Varieties, 2009 年 9 月 15 日, 佐賀大学
④ <u>Kohji Yanagawa</u>, “Dualizing complex of a toric face ring”, Pacific Rim Mathematical Association (PRIMA) Congress, 2009 年 6 月 9 日, University of New SouthWales (シドニー)
⑤ <u>柳川浩二</u>, “Dualizing complex of a toric face ring- Normal and non-normal cases”, 第 30 回可換環論シンポジウム, 2008 年 11 月 20 日, 国民宿舎虹の松原ホテル(佐賀県)
⑥ <u>Kohji Yanagawa</u>, “Squarefree modules over a toric face ring″, International Conference on Commutative Algebra, 2008 年 3 月 21 日, 横浜開港記念会館
⑦ <u>Kohji Yanagawa</u>, “ Regularities of cochain complexes and Koszul duality″, Castelnuovo-Mumford Regularity and Applications, 2007 年 6 月 15 日, マックスプランク数学研究所(ライプツィヒ)

６．研究組織
(1)研究代表者

柳川 浩二　 (Yanagawa Kohji)
関西大学・システム理工学部・准教授
研究者番号： 40283006

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

寺井 直樹 (Terai Naoki)
佐賀大学・ 文化教育学部 ・准教授
研究者番号：90259862

和久井 道久 (Wakui Michihisa)
関西大学・システム理工学部・講師
研究者番号：60252574

毛利 出 (Mori Izuru)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号：50436903

若松 隆義 (Wakamatsu Takayoshi)
埼玉大学・教育学部・教授
研究者番号：00192435