様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　5　月　10　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540031
研究課題名（和文）　対称群のモジュラー表現から可積分系へ
研究課題名（英文）　From modular representations of the symmetric groups to integrable systems

研究代表者
山田　裕史（YAMADA　HIROFUMI）
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40192794

研究成果の概要：対称群のモジュラー表現論を非線型微分方程式系に応用することを念頭に置いて研究をおこなった．対称函数の空間の新しい基底を導入し，シューア函数をこの混合基底で展開した時の係数が整数になることを発見した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：表現論，組合せ論
科研費の分科・細目：数学 4101 代数学
キーワード：対称群，シューア函数，ブラウアー・シューア函数，混合基底，単因子

１．研究開始当初の背景

ソリトン方程式とは「ソリトン」と呼ばれる特殊解をもつ非線型可積分系の総称である．KdV 方程式は古くから有名であるが，この KdV 方程式と代数幾何学との関係は 1970 年代に問題にされ現在に至るまで研究が続いている．とくに 1980 年に佐藤幹夫が KP 理論を発表してからは KdV を特別な場合として含む KP 方程式，あるいは無限連立系である KP 方程式系とグラスマン多様体の代数幾何学が精力的に研究されている．一方，無限次元リー環の表現論の観点から，伊達悦朗，神保道夫，柏原正樹，三輪哲二により導入された B 型 KP 方程式系（＝BKP 方程式系）については KP ほどには理論が整備されていないような印象を受ける．これらの方程式系は双線型方程式，いわゆる広田方程式に書き直すことにより，摂動法を用いてそのソリトン解が求められる．広田良吾によるこの方法は単に微分方程式の解法をあたえるのみならず，その構造を深く知る上で非常に重要なものと位置づけられる．我々はグラスマン多様体の組合せ論，すなわちシューベルト解析と KP 方程式系，BKP 方程式系の広田表示や無限次元リー環の表現論を３本の柱としてその関係をさらに深く探って行きたい．

ここで本研究課題に関連する私自身のこれまでの研究の背景を記しておく．1990 年以降，シューア函数およびその仲間であるシューアの Q−函数について興味をもって研究してきている．最初の著しい成果は有木進，中島達洋との共同研究で得られた「被約シューア函数」の理論である．シューア函数（シューアの S－函数）において変数を「手で落とした」ものがアフィンリー環の表現論でウエイトベクトルを具体的に記述するのに便利であること，また対称群のモジュラー表現論との関係などを述べたものである．同様のアイデアはシューアの Q－函数についても適用された．まず Q—函数を冪和対称函数たちの多項式として表示したものは「捻られた」アフィンリー環の基本表現を多項式環上に実現したときのウエイトベクトルになることを見出した．一般に Q—函数はヤング図形で添字付けられるが，与えられた Q—函数がどのウエイト空間に属するかを，ヤング図形の組合せ論を用いて明らかにした．またこの処方箋を別のもっとも簡単なアフィンリー環 $A^{(1)}_1$ に適用することにより，シューアの S—函数と Q—函数との間の一見奇妙な興味深い関係を発見した．対称群のスピンモジュラー表現の観点から眺めることにより，スピン分解行列を通してその意味を解明できた．この事実が発端になってスピン分解行列そのものを研究対象と見なし始めた．標数２の場合のスピン分解行列は正方行列になるが，その行列式をいくつか計算してみると２の冪になっていることに気がついた．単因子がすべて２の冪になっている，ということである．これに関しては少し後に易しい証明を与えることもできたので短いノートを書いた．またこれに関連して対称群のカルタン行列の単因子についても最近面白い結果を得たので，大阪教育大の宇野勝博と短い共著論文を書いた．

２５年前に佐藤幹夫は彼の KP 方程式系の理論の集中講義において「KdV は三角形，NLS は長方形」と標語的に話した．シューア函数がその多項式解を与えるヤング図形の特徴を述べたものである．KdV の方は理解しやすいのだが，NLS（非線型シュレーディンガー方程式）は当時の私にはまったく理解できなかった．その数年後，ヴィラソロ代数の特異ベクトルに関する脇本實との共同研究で長方形のシューア函数に直接触れる機会を得た．永年に渡り，NLS との関係が気になっていたのだが，池田岳との研究で様子がわかり始めた．一番簡単なアフィンリー環 $A^{(1)}_1$ の基本表現の「斉次ハイゼンベルク」というのが本質的であることに気がついたのだ．まずこれを詳しく考察して NLS の斉重多項式解のすべてを求めることができた．それが長方形のヤング図形に付随するシューア函数である．「斉次ハイゼンベルク」に気がつけばヴィラソロ代数の特異ベクトルとの関係はすぐにわかる．２０年来の疑問が氷解したのだった．ヤング図形のなかで最も簡単な長方形に付随するシューア函数はいろいろな意味で特徴的である．$A^{(1)}_1$ に限らず，$A^{(2)}_2$ や $D^{(2)}_2$ でも長方形が登場することがわかっている．

２．研究の目的

以上の研究をふまえて「対称群のモジュラー表現から可積分系へ」という研究課題を掲げるに至った．もちろん対称群だけに限定せず同様の取り扱いのできるワイル群やヘッケ環をも射程に入っているのは言うまでもない．通常表現に比してモジュラー表現では可積分系との組合せ論的な関係がより鮮明に見えてくることが期待される．

具体的な目標の一つはアフィンリー環 $D^{(2)}_{\ell+1}$ の基本表現の空間を具体的に記述することである．主ハイゼンベルクに対応する描像はシューアのQ−函数で記述されることがわかっているが，斉次ハイゼンベルクの場合はシューア函数とQ−函数のテンソル積で記述されるようだ．この空間の基底をしっかりと理解したい．二つの描像の間の「絡み合い作用素」を明示的に書くことはヤング図形の組合せ論の面白い応用となろう．基底の変換行列の行列式が２の冪になるのではないかという予想もあり，興味深い．

もう一つ具体的目標がある．これはもう何年も前から常に問題にしており，前回の申請書にも書きながらまだ完全な理解に達していないことである．ヴィラソロ代数とプリュッカー関係式の個数の関係．脇本實との共同研究の際，フォック表現の形式的指標が佐藤によるプリュッカー関係式の個数，すなわちKP の広田方程式の個数に一致している，という事実を本質的に用いた．その時は「都合の良い偶然」といった認識だったのであるが，やはり避けては通れない問題としてその解明に力を注ぎたい．ヴィラソロと KP の関係はいわゆる共形場理論として既に結実しているが，この個数の一致に関しては，少なくとも私はまだ納得できない．共形場理論とは異なる側面があるものと信じている．

３．研究の方法

アフィンリー環 $D^{(2)}_{\ell+1}$の基本表現の斉次ハイゼンベルクの描像（斉次描像）を理解すること．この表現の主ハイゼンベルクの描像（主描像）は私の以前の仕事により，その表現空間，基底，シュバレー生成元の作用などが完全にわかっている．基底としてはシューアのQ−函数が取れるのであるが，斉次描像に移る時その絡み合い作用素はストリクトヤング図形のハードコア，ハードクオーシェントを用いて記述されることを示したい．特別な場合，すなわち ℓ が１のときはうまく行くことがわかっている．この場合に組合せ論的な手続きを経て出来上がる基底はシューア函数のプレシズムとQ−函数のテンソル積である．これをとりあえず「混合基底」と呼ぶことにする．この混合基底を用いた長方形のシューア函数の表示式は既に池田岳らとの共同研究で得られているが，これはアフィンリー環 $D^{(2)}_2$ の作用を巧みに用いて証明されるものである．大学院生，青影一哉の協力を得て，主描像と斉次描像の間の絡み合い作用素を実験的に計算したところ，その「整数性」に気がついた．またその行列式を求めたところ奇妙なことに，すべて２の冪になっている．アフィンリー環，ひいてはKP，BKP方程式系と対称群の標数２のモジュラー表現論との密接な関係を暗示している．そこで今年度は，以上の実験的事実に厳密な証明を付け，あわせてアフィンリー環 $D^{(2)}_{\ell+1}$ への一般化を試みる．ストリクトヤング図形の組合せ論的な道具立ては整っている気がするので，リー環の詳しい構造を加味すれば満足すべき結果が得られるのではなかろうか．シューアのQ−函数はBKP方程式系の斉次多項式解である．我々の混合基底がKP，BKP方程式系においてどのような役割を演ずるのかを詳しく見て行きたい．石川雅雄，若山正人による「小行列式和公式」が重要な働きをするのではないかというアイデアをもっている．BKP方程式系についてはKP方程式系ほどには理論の整備が為されていない．この組合せ論的な側面の研究を私は自身のライフワークと位置づけている．BKPの背後にはリー超代数の表現論も控えている．対称群の，あるいはその２枚の被覆群の標数２のモジュラー表現論とリー超代数の表現論をBKPを通して解

明して行きたい，というのが長期的な研究計画である．

４．研究成果

対称群のモジュラー表現論を非線型微分方程式系に応用することを念頭に置いて研究をおこなった．２被約シューア函数をシューアのＱ函数で展開した時に現れる係数は非負整数であることが既に知られており，Stembridge 係数と呼ばれているが，その表を行列の形に書いたものと，対称群の標数２のモジュラー表現論に現れる分解行列との類似性に気がついた．互いに「列基本変形」で移り合うことを証明し，単因子がカルタン行列のそれと一致することを見た．この事実をもとにして，対称函数の空間の「混合基底」を導入し，シューア函数をこの混合基底で展開した時の係数が整数になることを発見した．この発見の萌芽はすでに前年度の研究に会ったのだが，昨年度及び今年度の精密な研究により，論文として報告できるくらいまで成熟した．この混合基底はこれからアフィンリー環の表現論や非線型微分方程式系で重要な意味を持ってくると思う．当初は標数２の場合だけが考えられたが，その後の研究により，一般の標数でも同様の混合基底が存在することがわかった．その際，いわゆるブラウアー・シューア函数がうまく機能する．シューア函数と混合基底，私は二つの基底の間の変換行列を問題にした．その行列式および単因子について，それらがｐの冪になるという，非自明な結果を得た．その単因子についても，つい最近よい公式が得られた．表現論的な意味付けが今後の課題である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① 池田岳，水川裕司，中島達洋，山田裕史，Mixed expansion formula for the rectangular Schur functions and the affine Lie algebra A(1,1)，Advances in Applied Mathematics 40 (2008)，514–535，査読有

② 青影一也，水川裕司，山田裕史，Compound basis for the space of symmetric functions，RIMS-Kokyuroku Bessatsu B8 (2008)，63-70，査読有

③ 青影一也，水川裕司，山田裕史，Compound basis arising from the basic A(1,1)-module，Letters in Mathematical Physics 85 (2008)，1-14，査読有

〔学会発表〕（計 2 件）

① 山田裕史，Compound basis for the space of symmetric functions，研究集会「有限群・頂点作用素代数と組合せ論」，２００９年１月６日，京都大学数理解析研究所

② 青影一也，水川裕司，山田裕史，Compound basis for the space of symmetric functions，研究集会 Formal Power Series and Algebraic Combinatorics，２００７年７月３日，南開大学（天津）

６．研究組織

(1)研究代表者

山田　裕史（YAMADA　HIROFUMI）
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40192794

(3)連携研究者

吉野　雄二（YOSHINO　YUJI）
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：00135302

中村　博昭　(NAKAMURA　HIROAKI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 60217883

石川　佳弘　(ISHIKWA　YOSHIHIRO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・助教
研究者番号: 50294400

池田　岳　(IKEDA　TAKESHI)
岡山理科大学・理学部・講師
研究者番号: 40309539