

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540032

研究課題名 (和文) 保型表現の分岐理論の構築：分岐表現と L-関数の数論

研究課題名 (英文) Towards ramification theory of automorphic representations:
Ramified representations and their L-factors

研究代表者

石川 佳弘 (ISHIKAWA YOSHIHIRO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・助教

研究者番号：50294400

研究成果の概要：

フェルマ予想 (FLT) の様な数論の問題は、非常に広範で深い理論を駆使して研究される。FLT の証明をも含み、70年代より数論研究の支柱たり続けている Langlands プログラムに沿って、比較的小さい群 $U(3), GSp(4)$ の場合に、その分岐表現 と 付随する L-関数を研究した。方針は、L-関数を 上の群を対称性にもつ保型形式という "関数" の積分変換で 表示し、その積分の分岐因子を (一般化)ホイタッカー関数を通じて 明示的に研究する。表現の分岐が激しくない 簡易な場合に、L-因子を計算した。分岐が激しい場合にも、部分群からのアプローチが有効で有ることが判った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式, 表現論, L-関数

1. 研究開始当初の背景

数論の重要な問題の多くは、L-関数の性質として翻訳可能である。即ち、L-関数の 解析的性質や 特殊値に、数論的に深い情報がエンコードされているのである。しかし、数論的対象から代数的に定義される L-関数を直接に研究することは、一般には大変困難である。そこで「解析的に定義される保型 L-関数の研究に帰着させる」というのが、20世紀中葉以降 数論研究の中心戦略となっている (Langlands 哲学)。保型表現の研究が、数論の問題に対して深い結果をもたらすので

ある。かのフェルマ予想も、一変数保型形式の L-関数 と 有理係数楕円曲線の L-関数の対応を示す事で解決されたのであった。

近年 L-関数の数論研究は 次の段階、即ち特殊値の研究に移行してきている。上の対応を通じて、更に深い数論的情報を L-関数から読み取ろうというのである。この段階に於いては、L-関数の分岐因子の精緻な研究が不可欠である。

代数的 L-関数のサイドには、多変数/高次元の場合にも、斎藤毅氏の ガロア表現の分岐

理論, Rapoport, Haines 等の 算術的商多様体の悪い還元とニアバイ サイクルの理論など、高度に発達した研究がある。

しかるに、保型 L-関数については、まだまだ分岐因子の研究は 立ち遅れている。本質的に一変数保型形式の場合と同様に扱える $GL(2)$ の保型表現については、深い結果が現れてきているものの、一般の群 G の保型表現に対しては、特殊な状況での散発的研究しかない。

2. 研究の目的

以上の研究状況に鑑み、本研究では、今後の数論研究の礎に資するべく「保型 L-関数の局所理論の再構築」を目指す。即ち、これまでその定義すら等閑にされてきた多変数保型形式に対する保型 L-関数の分岐因子を、一般化 Whittaker 関数の積分変換の研究を経由することで、数論の局所的/大局的問題への応用に耐えうるレベルまで 明示的に研究する。ここで、大局的問題とは 上記の「L-関数の特殊値の研究」を意味し、局所的問題とは「 p -進り一群 $G(\mathbb{Q}_p)$ の許容表現 π_p の分岐理論」を想定している。

種々の総合を要する「特殊値の研究」については、射程圏内に睨みつつも将来への課題とし、本研究では、群 G が比較的小さい $U(3)$, $GSp(4)$ の場合に、局所問題：分岐理論の完備を 目標とする。即ち、

(1) 明示公式の所産として得られる局所関数等式から "new vector" と "解析的導手" を取り出し、(2) 分岐 L-因子の研究 及び (3) 表現の分岐度合の研究を $GL(2)$ の場合と同程度にまで引き上げる。

3. 研究の方法

(1) <我々の方法>

保型 L-関数の研究法には、大きく分けて、あ) Eisenstein 級数の定数項を調べる Langlands-Shahidi の方法 と

い) 表現の適切な模型から作られる積分を調べる Rankin-Selberg の方法 がある。

保型表現の黎明期には、"あ) には限界があり い) の方針の方が強力であろう"と 信じられていた。しかし、歴史は人々の期待を裏切ることとなる。90年代終わり頃、H.Kim の観察をブレイクスルーとし、あ) は 保型 L-関数の研究に莫大な進展をもたらした。が、この"流行"も一段落を見、適用可能な場合は

取り付くされた感がある。

本研究では、30 余年前の素朴な方針 い) に立ち帰り、Rankin-Selberg の積分を詳細に研究する事で、将来の数論研究に資すべき基礎を構築する。戦略は、「保型表現の局所成分 π_p に属する (一般化)Whittaker 関数 W_p の明示公式を導出する」という 至極単純だが "迂遠な"準備研究を要する 正面突破法である。

これまでに、申請者、分担者(森山)は、無限素点上の分岐因子を 上記の方針で研究してきた。この経験を基に、これまで蓄積してきた研究手法を 有限素点上の状況に翻訳・移植し、対応する理論を打ち建てようというのである。

(2) <他の方法との比較>

L-関数の分岐因子を決定するだけなら、上の方針は"遠回り"をしすぎている。実際、保型表現が "generic" な場合、Whittaker 関数の漸近挙動だけから W_p の明示公式を経由すること無く、分岐因子は計算できる。これは、 $GSp(4)$ の場合は Takloo-Bighash が、 $U(2,1)$ の場合には 申請者が実行した。また、あ) の方針でも、"generic" な場合には Shahidi が 部分的結果を得ている。

それにも拘らず、我々が 敢えて明示公式を準備する理由は、次の二点にある。

i) ゼータ積分を具体的に計算する事で、局所関数等式を ε -因子の形まで調べられる。これにより、分岐表現 π_p の "解析的導手" が 定義でき、 π_p の分岐具合の不変量を得ると期待される。これは、 $GL(2)$ の triple L-関数に対して、Kudla, Rapoport, Yang の三氏が Steinberg 表現の場合に採った方法である。

更に、 π_p 自身の表現論的性質から決まる "代数的導手"(保型形式のレベルの局所的な対応物)との比較という新しい 研究テーマの創制が見込まれる。群が $SL(2)$, $U(2)$ の場合には、Lansky と Raghuram による観察がある。

ii) 保型 L-関数の特殊値を ゼータ積分を通じて研究する際、局所表現の模型の中に "特別な関数"を見出すことが、肝要である。 $GL(2)$ の場合の Popa, Xue 達の研究では、S-W.Zhang が導入した "Whittaker new form"が、不可欠であった。 $GSp(4)$ の場合にも その存在を傍証する Roberts-Shemidit の研究がある。明示公式と差分系の詳査により、"new vector"の発見が期待される。

4. 研究成果

(1) <2007年度>

(i) 本研究の目的は、保型形式のフーリエ成分の数論的性質を表現論的手法を使って調べることである。数論的に深い情報を取り出すには、局所理論が肝要となる。特に、調べるべき保型形式の生成する表現に付随する一般化/通常 Whittaker 模型の分岐理論が、重要な役割を担う。比較的小さい群 $U(3)$, $GSp(4)$ の場合に、以下の (A) (B) が 2007 年度の研究計画であった。

(A) 各分岐表現に付随する Whittaker 関数の明示公式の研究

(B) 局所ゼータ積分による分岐 L -因子の研究

(ii) 準分裂 $U(3)$ の Steinberg 表現の場合には、明示公式及びそのゼータ積分による標準 L -関数の分岐因子は、筆者により得られていた。

(A) については、Steinberg 表現の場合に通用した手法が、他の表現にも通用する条件が解った。

(B) については、井草局所ゼータに関連付ける手法を、doubling 積分から我々の局所ゼータ積分の場合へ拡張することを試みた。

これらについて、9月 北海道大学 1月 岡山大学 に於いて、現行方法の問題点について 近隣分野の研究者と討議した。

(iii) 森山は、 $GSp(4;R)$ の場合に 一般化 Whittaker 関数が 通常のもの積分変換で得られることを観察した。

高野は、 p -進簡約型対称空間の表現の分類について 部分表現定理 と 相対的尖点表現の構成を行った。

若槻は、 $Sp(4)$ 上の正則カスプ形式に対し Hecke 作用素の跡公式を与えた。

また 安田は、 $GL(n)$ 上のカスプ形式の torus 周期が $(n-1)$ 個の保型 L -関数の積で書けることを示した。

吉野は、Carabi-Yau 三角圏に於る Auslander-Reiten 理論の高次元化をほぼ完成させた。

(2) <2008年度>

(i) 二年目の計画は、前年の Whittaker 関数研究の一般化 Whittaker 関数への拡張、及び ε -因子の研究を予定していた。即ち、比較的小さい群 $U(3)$, $GSp(4)$ の場合に、以下の (A) (B) が 2008 年度の研究計画であった。

(A) 各分岐表現に付随する 一般化 Whittaker 関数の研究

(B) 表現の分岐度合 と "解析的導手" の関係の解明

(ii) 通常の Wittaker 関数と異なり、一般化 Whittaker 関数に対しては、当初の期待が上手く働かないことが次第に判ってきた。

(A) については、準分裂 $U(3)$ の Steinberg 表現の場合に、Whittaker 関数の明示公式 及び そのゼータ積分による 標準 L -関数の分岐因子は得られたが、Fourier-Jacobi 関数については 研究が停滞している。

1月の RIMS 集会上 Technion 大の Baruch 氏を招聘し、Kirillov 関数を用いる利点と見込まれる結果について示唆を受けた。

(B) については、当初の方針を変更し、分岐度合を測るコンパクト群(の候補)からのアプローチを試みた。これに関して、安田の主催する1月の研究集会上に於いて、知られている場合の分析と有り得る拡張を報告した。新しい方針に沿う "解析的導手" については、明示研究の方針がたち 簡易な場合に試行している。来る8月には、これに関する Work Shop を開催し、本課題共同研究者を含む 国内の専門家と研究討議を重ねる予定である。

(iii) 森山は、 $GSp(4;R)$ の場合に "new vector" の存在が期待できない積分の存在を観察した。

また 安田は、Whittaker 模型の一意性の拡張に取り組み、一定の結果を得ている。

(3) <今後の展望>

(2)(ii)(B)にある様に、本研究課題から派生した「分岐度合いを測るコンパクト部分群の表現から、元の群の分岐表現/ ε -因子の研究へのアプローチ」が、2009~2011年度 科研費研究課題として採択され、着々と研究連絡・討議が進められている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

(1) 石川 佳弘,
Rankin-Selberg method --through typical
examples--,
整数論サマースクール報告集 第 16 回(2009)
249-331. (査読無し)

(2) 石川 佳弘,
保型表現の分岐と導手 --JPSS 理論の紹介--
prerprint, 2008 May.
京都大学 数理解析研究所講究録別冊 (2009)
掲載予定. (査読有り)

(3) 石川 佳弘,
Kudla's Yoga --A heigher (co-)dimensional
generalization--,
prerprint, 2007 Nov.
研究集会「Heegner point と Gross-Zagier 公
式」報告集 掲載予定. (査読無し)

(4) Taku Ishii and Tomonori Moriyama,
Spinor L-functions for generic cusp forms
on $\mathrm{GSp}(2)$ belonging
to principal series representations,
Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008),
5683—5709. (査読有り)

(5) Tomonori Moriyama,
L-functions for $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GL}(2)$:
archimedean theory and applications,
Canadian Journal of Mathematics. (採録決
定済み) (査読有り)

(6) Seidai Yasuda,
Local epsilon_0-characters in torsion rings,
J. Theor. Nomb. Bordeaux 19 (2007),
763-797. (査読有り)

(7) 安田 正大,
L.Lafforgue 氏の業績-関数体上の GL_r に対
する Langlands 対応の確立-,
数学 60 (2008), 415-424. (査読有り)

(8) Shinichi Kato and Keiji Takano,
Subrepresentation theorem for p-adic
symmetric spaces,
Int. Math. Res. Notices (2008), No.11, 1-40.
(査読有り)

[学会発表] (計 15 件)

(1) 石川 佳弘,
保型表現のイプシロン因子と導手,
研究集会「数論幾何における分岐理論」,
神戸フルーツフラワーパーク
2009年1月12日.

(2) 石川 佳弘,
保型表現の分岐と導手--JPSS 理論の紹介--,
研究集会「代数的整数論とその周辺」,
京都大学数理解析研究所,
2008年12月11日.

(3) 石川 佳弘,
Rankin-Selberg method --through typical
examples--
第 16 回整数論サマースクール
「保型 L-関数」, 幕張メッセ国際会議場,
2008年8月20日.

(4) 石川 佳弘,
Kudla' Yoga : A higher (co-)dimensional
generalization,
研究集会「Heegner point と Gross-Zagier 公
式」東北大学理学部, 2007年10月12
日.

(5) 森山知則,
Rankin-Selberg convolutions for $\mathrm{GSp}(2) \times$
 $\mathrm{GL}(2)$: Archimedean theory and
applications,
大阪大学整数論・保型形式セミナー,
大阪大学理学研究科, 2008年11月9日.

(6) 森山知則,
2 次実解析的 Siegel 保型形式から定義され
る L 関数について
数学談話会, 大阪大学理学研究科,
2008年度12月17日.

(7) 森山知則,
Rankin-Selberg convolutions for
 $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GL}(2)$: archimedean theory and
applications,
the 22nd annual workshop on automorphic
forms and related topics,
Texas A & M Univ., 2008年3月11日.

(8) 森山知則,
Langlands-Shahidi method 概説,
第 16 回整数論サマースクール
「保型 L-関数」, 幕張メッセ国際会議場,
2008年8月20日.

(9) Seidai Yasuda,

Does Tate conjecture imply the standard conjecture?,
Recent developments on algebraic K-theory and motive theory,
RIMS, 2008年7月2日.

(10) Seidai Yasuda,

Diagonal periods of $GL(n)$ over the rational function field,
London Number Theory seminar,
Imperial College London, 2008年11月12日.

(11) Seidai Yasuda,

Regulators on Drinfeld modular varieties and periods of automorphic forms,
Number Theory seminar, Nottingham Univ,
2008年11月14日.

(12) 若槻聡,

ヘッケ作用素の明示的跡公式について,
大阪大学整数論保型形式セミナー,
2007年6月22日.

(13) Satoshi Wakatsuki,

Explicit dimension formulas for spaces of vector valued Siegel cusp forms of degree two,
Oberwolfach Workshop "Modulformen",
Oberwolfach Germany, 2007年10月30日.

(14) Satoshi Wakatsuki,

On traces of Hecke operators on spaces of Siegel cusp forms of degree two,
The 10th Autumn Workshop on Number Theory, 白馬ハイマウントホテル,
2007年11月24日.

(15) 若槻聡,

On traces of Hecke operators on spaces of Siegel cusp forms of degree two,
研究集会「保型表現・保型形式とL関数の周辺」, 京都大学数理解析研究所,
2008年1月24日.

[図書] (計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石川 佳弘 (ISHIKAWA YOSHIHIRO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・助教
研究者番号: 50294400

(3) 連携研究者

森山 知則 (MORIYAMA TOMONORI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80384171

安田 正大 (YASUDA SEIDAI)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号: 90346065

吉野 雄二 (YOSHINO YUJI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 00135302

高野 啓児 (TAKANO KEIJI)
明石工業高等専門学校・一般教育・准教授
研究者番号: 40332043

若槻 聡 (WAKATSUKI SATOSHI)
金沢大学・大学院自然科学研究科・助教
研究者番号: 10432121