

平成 22 年 5 月 1 日現在

研究種目： 基盤研究 (C)

研究期間： 2007 ~ 2009

課題番号： 19540033

研究課題名 (和文) 楕円量子群の表現と楕円特殊関数

研究課題名 (英文) Representations of elliptic quantum groups and their applications to elliptic special functions

研究代表者

今野 均 (KONNO HITOSHI)

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号： 00291477

研究成果の概要 (和文)： 面型楕円代数 $U_{q,p}(A_N^{(1)})$ にホップ歪代数構造を導入して、これを楕円量子群として定式化した。この構造に基づいて、無限次元ダイナミカル表現の繋絡作用素を定式化し、準ホップ代数構造を介して得られていた結果との整合性を確認した。また、ドリンフェルト多項式のテータ関数類似を定式化し、それによって有限次元既約ダイナミカル表現が一意的に特徴付けられることを示した。 $N=2$ の場合に、有限次元ダイナミカル表現のテンソル積表現に対する Clebsch-Gordan 係数の楕円関数類似を導出し、それが楕円超幾何級数 ${}_2V_{1,1}$ によって与えられることを示した。

研究成果の概要 (英文)： By adding a Hopf algebroid structure to the face type elliptic algebra $U_{q,p}(A_N^{(1)})$, we have formulated it as an elliptic quantum group. Thanks to this structure, we have formulated the intertwining operators on the infinite-dimensional dynamical modules and obtained a consistent result to the previous one derived by using the quasi-Hopf algebra structure. We also have formulated the theta function analogue of the Drinfeld polynomials and shown that they specify the finite-dimensional irreducible dynamical representations uniquely. In the case $N=2$, we have derived the elliptic analogues of the Clebsch-Gordan coefficients for the tensor product of the finite-dimensional dynamical representations, and shown that they are expressed by using the elliptic hypergeometric series ${}_2V_{1,1}$.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野： 数理物理学, 表現論, 代数解析

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： 量子群, 楕円関数, 超幾何級数, アフィン・リー代数, 可解格子模型

1. 研究開始当初の背景

(1) それまでの研究で代表者らは、2種類の楕円量子群、頂点型 $A_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ と面型 $B_{q,\lambda}(\mathfrak{g})$ 、及び楕円代数 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ (\mathfrak{g} はアフィンリー環) を定式化した。楕円量子群とは、生成元の母関数が楕円関数を構造関数とする関係を満たす新しいタイプの量子群である。 $A_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ と $B_{q,\lambda}(\mathfrak{g})$ は、量子アフィン代数 $U_q(\mathfrak{g})$ のシュバレー生成元によって定式化された準ホップ代数である。一方、 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ は、 $U_q(\mathfrak{g})$ のドリンフェルト生成元によって定式化された結合代数であるが、その余代数構造は不明であった。

(2) 準ホップ代数として定式化された楕円量子群 $A_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ や $B_{q,\lambda}(\mathfrak{g})$ は、余結合射と呼ばれる同型対応を介してのみ余結合律を満たすが、余結合射の表現の構成は容易ではなく、テンソル積表現を具体的に構成する際の障害になっていた。一方、Felder, Varchenko, Etingof によって、ホップ代数を余代数構造に採る楕円量子群 $E_{\tau,\eta}(\bar{\mathfrak{g}})$ ($\bar{\mathfrak{g}}$ は単純 Lie 環) の定式化がなされており、ここでは余結合律が保持される。代表者は楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ に対して、ホップ代数の構造が導入でき、それが Felder-Varchenko らの楕円量子群 $E_{\tau,\eta}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の中心拡大を与えることを見出した。

(3) 超幾何関数の楕円関数類似の研究が急速に展開され、多変数のものまで含めて特殊関数の楕円関数類似の研究の気運が国際的に高まって来ている。19世紀後半に始まった特殊関数の q -類似の研究が、20世紀後半に量子群の表現論に裏付けされて“ q -解析”の理論として花開いたように、楕円特殊関数の表現論的アプローチは、楕円量子群によって基礎付けられる“楕円-解析”とも言うべき新しい分野の開拓につながると期待される。

(4) 特に、Koelink-van Norden-Rosengren は Felder-Varchenko の楕円量子群 $E_{\tau,\eta}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の余表現を構成し、余表現行列要素が楕円超幾何級数 ${}_{12}V_{11}$ を用いて表されることを示した。さらに、 $*$ -構造に基づいたユニタリー表現を介して、その直交関係式を導いた。

(5) 可積分系の研究においては、そのウェイトは世界的に見ても楕円関数型の場合へとシフトしつつある。三角関数型の場合に量子群が果たしたように、楕円量子群は、これら楕円可積分系の代数構造を支配し、固有値問題の解決や相関関数などの物理量の導出に強力な枠組みを提供することが期待されている。

2. 研究の目的

楕円量子群の表現論の整備を押し進めるとともに、古典的によく知られている“特殊関数 vs 群の表現”という図式を楕円関数類似の場合へと押し進め、楕円特殊関数の表現論的理論の構築を

目指す。具体的な研究内容は大きく次の3つに分けられる。

(1) 楕円量子群 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の定式化:

楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ に対してホップ代数構造を導入し、楕円量子群としての定式化を完成させる。さらに、結果を他のアフィンリー環 $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ の場合に拡張して、ホップ代数としての楕円量子群 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の定式化を目指す。

(2) 楕円量子群の表現の整備:

ホップ代数構造に基づいて、 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の有限次元表現のテンソル積の構造を明らかにする。また、 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の有限次元・無限次元表現の具体的な構成を他のアフィンリー環の場合へと押し進める。特に、 L -作用素の構成や、無限次元 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ -加群の繋絡作用素(頂点作用素)の実現などを与える。

(3) Clebsch-Gordan 係数の楕円関数類似の表現論的導出:

$U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元表現のテンソル積に対して Clebsch-Gordan 係数(の楕円関数類似)を導出し、Koelink-van Norden-Rosengren の余表現行列との比較を行う。また、この楕円 Clebsch-Gordan 係数が満たすべき関係性を余結合律などの表現論的な構造から導くことを目指す。

3. 研究の方法

(1) Etingof-Varchenko によって導入され Koelink-Rosengren によって整備されたホップ代数構造を楕円代数 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ に適用して、これを楕円量子群として定式化する。そのために、 $U_{q,p}(\mathfrak{g})$ の RLL -関係式を利用する。 RLL -関係式は、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ に対しては、神保-今野-小竹-白石において、その高ランク版 $U_{q,p}(A_n^{(1)})$ に対しては、小島-今野で得られている。また、 $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ に対しては、 RLL 関係式を定式化することから始める。

(2) ホップ代数構造に基づいて、楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元表現のテンソル積表現の構造を明らかにする。示すべきポイントは次の2点である。

- ① 量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の場合に Chari-Pressley によって示された可約性の条件の楕円類似の定式化。
- ② $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の場合に有限次元既約表現の分類に用いられるドリンフェルト多項式の楕円関数類似の定式化。

(3) $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元表現のテンソル積が可約な場合に、部分加群の基底を具体的に構成して Clebsch-Gordan 係数の楕円関数類似を導出する。

4. 研究成果

(1) 楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の余代数構造の解明や表現論の整備に関して次の成果を得た.

① 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の定式化

まず、双次数付け構造やモーメント射を定めて $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ を H -代数として再定式化し、次いで、テンソル積構造、余積、対合射、余単位射を与えて、その余代数構造をホップ亜代数として定式化した。これにより、新しい面型楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ が誕生した。これは、ドリinfeld生成元による楕円量子群の実現としては唯一の例になっている。

ドリinfeld生成元は自由場表現という無限次元表現との相性が良く、下の③の成果を可能にしている。また、④の有限次元既約表現の定式化においても不可欠である。さらに、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の余積は余結合律を満たし、研究の背景(2)で述べた準ホップ代数としての楕円量子群 $B_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の欠点を補うものになっている。

② ダイナミカル表現の導入

Etingof-Varchenko に従って、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の H -代数としての表現(ダイナミカル表現)を定式化した。これは、係数体が $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と非可換であることを許す新しい表現である。また、ホップ亜代数構造を用いて、テンソル積表現も定めた。

③ $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の頂点作用素の定式化

ホップ亜代数構造に基づいて、無限次元の $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -ダイナミカル加群上の繋絡作用素(頂点作用素)に対して、それを定義付ける繋絡条件を書き下した。これは RLL -関係式を満たす L -作用素を用いて表される。この条件式は、神保-今野-小竹-白石によって、 $B_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の準ホップ代数構造と $B_{q,\lambda}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の関係に基づいて導出されていたものと一致し、ホップ亜代数構造の準ホップ代数構造との整合性が確認された。

$U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の頂点作用素は、フュージョン RSOS 模型と呼ばれる面型可解格子模型の代数解析的定式化において不可欠なパーツであり、その表現論的な起源が明らかになったことで、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現に基づく同定式化はようやく完成をみた。

④ 有限次元既約ダイナミカル表現

ドリinfeld生成元を用いて $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元のダイナミカルな最高ウェイト表現を定め、そのテンソル積表現の構造を調べた。特に、ドリinfeld多項式のテータ関数類似を定式化し、それによって有限次元既約ダイナミカル表現が一意的に特徴付けられることを示した。これは、アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限次元既約表現の分類

に関する Chari-Pressley の定理の楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の場合への拡張にあたる。

⑤ 楕円 Clebsch-Gordan 係数の導出

有限次元ダイナミカル表現のテンソル積の部分加群の構造を調べ、部分加群のウェイトベクトルを陽に構成するとともに、Clebsch-Gordan 係数の楕円関数類似を導出し、それが楕円超幾何級数 ${}_{12}V_{11}$ によって与えられることを示した。これによって、 ${}_{12}V_{11}$ に表現論的な意味付けが与えられた。

(2) 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ のホップ亜代数としての定式化

① 楕円代数 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に双次数付け構造やモーメント射、テンソル積の構造を与え、 H -代数として定式化した。

② $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の L -作用素を用いて、余積、対合射、余単位射を定め、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ をホップ亜代数として定式化した。特に、対合射の定式化に際して、 L -作用素に対する量子楕円行列式や-小行列式を定義づけ、 L の逆作用素の陽な表式を与えると同時に、ラプラス展開公式の量子楕円変形が成立することを示した。

このような高ランクへの拡張が示せたことにより、他のアフィンリー環の場合への拡張の足がかりが得られた。また、 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ が楕円量子群として定式化されたことにより、そのテンソル積表現の構造が系統的に調べられるようになった。この結果は、多変数の楕円超幾何級数の表現論的な導出や理論付けの研究において有用であることが期待される。

(3) $B_N^{(1)}$ 型楕円量子群の定式化に関する成果として、次のものを得た。

① アフィン量子代数 $U_q(B_N^{(1)})$ のドリinfeld生成元として含まれる N 個のボソン(単純ルート型のボソン)から、基本ウェイト型のボソンを構成する方法を見出し、さらに、そこからベクトル表現のウェイトベクトルに相当する $2N+1$ 個のボソンを構成する方法をも見出した。これらのボソンたちは RLL -関係式を満たす L -作用素の定式化において不可欠な要素である。また、これらの構成法は他の型のアフィンリー環の場合へも適用できる。

② $U_{q,p}(B_N^{(1)})$ の楕円カレント(生成元の生成母関数)を構成し、それらが満たす楕円関数型の関係式を導出した。

③ アフィン量子代数や $A_N^{(1)}$ 型楕円量子群に対する結果から、 $B_N^{(1)}$ 型の楕円量子群の L -作用素はハーフカレントと呼ばれる楕円カレ

ントのある種の積分変換をガウス分解の形に組み上げることで構成できると予想されている。この積分変換の核を決める一般的な原理はまだ知られておらず、*RLL*-関係式をたよりに試行錯誤で決めるしかない。目下のところ部分的に決定が進んでいる。

今後、*L*-作用素の構成を完成させ、楕円量子群 $U_{q,p}(B_N^{(1)})$ をホップ亜代数として定式化する。また、頂点作用素や $B^{(1)}_N$ 型変形 *W* 代数の導出を行う計画である。

(4) 新しい方向への展開

① ホップ亜代数の変形理論

コサイクル条件を満たすツイスターを用いて、*H*-代数の構造を保ちながらホップ亜代数構造を変形する可能性について調べ、基本的に、ホップ代数 $U_q(\mathfrak{g})$ から準ホップ代数 $B_{q,\lambda}(\mathfrak{g})$ へのツイスターをベースにして、そのようなツイスターが系統的に構成できる可能性を見出した。但し、モーメント射の変形には未だ不定性があり、*H*-代数の公理の精密化も含めて検討すべき問題が残っている。

② アフィンヘッケ環との関係

$A_N^{(1)}$ 型アフィンヘッケ環を用いて楕円量子群 $U_{q,p}(A_N^{(1)})$ の *q*-フォック空間への作用が構成できることを見出した。これは楕円量子群に対するある種のシューア双対とみることができる。また、アフィン量子代数の *q*-フォック空間上の表現は、籐多様体の同変 *K* 群上の表現と同値であることが知られており、この対応を楕円量子群の場合へ拡張することは、その存在が期待される対応する楕円コホモロジー理論の構築への手がかりになると思われる。さらには、マクドナルドの対称多項式理論の楕円関数型理論の構築とも密接に関係してくると期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計3件)

- ① H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, Hopf Algebroid Structure and Elliptic Hypergeometric Series", *J. of Geom. Phys.*, 査読有, **59**, 1485-1511 (2009).
- ② H. Konno, "The Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ ", *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, **B11**, 53-73, (2009).

- ③ H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and Vertex Operators", *J. of Phys. A: Math. and Theoretical*, 査読有, **41**, 194012 (12 pages), (2008).

〔学会発表〕(計8件)

- ① H. Konno, "The Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$: Formulation and Applications", 国際会議 "Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity", 2009年6月27日-7月2日, ランダウ研究所, チェルノゴロブカ, ロシアにおける招待講演
- ② H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and Elliptic Hypergeometric Series", 第12回代数群と量子群の表現論研究集会, 2009年5月10日 - 15日 休暇村南紀勝浦, 招待講演
- ③ H. Konno, "楕円量子群: Hopf algebroid 構造と表現", 2009年3月, 日本数学会 2009年度年会 無限可積分系セッション, 特別講演, 東京大学
- ④ H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and Its Representations", 国際会議 Elliptic Integrable Systems, Isomonodromy Problems, and Hypergeometric Functions, 2008年7月21 - 25日, マックス・プランク研究所, ドイツ, 招待講演
- ⑤ H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, *H*-Hopf Algebroid Structure and Elliptic Hypergeometric Series", 研究会 "組み合わせ論的表現論の拡がり", 2007年10月23 - 26日, 京都大学数理解析研究所, 招待講演
- ⑥ H. Konno, "楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, Hopf 亜代数構造と楕円超幾何級数", 2007年9月, 日本数学会 2007年秋季総合分科会, 東北大学
- ⑦ H. Konno, "Elliptic Quantum Group, Hopf Algebroid and Elliptic $6j$ -symbols", 国際会議 "Recent Advances in Quantum Integrable Systems", 2007年9月, アヌシー理論物理学研究所, アヌシー, フランス
- ⑧ H. Konno, "Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ as an *H*-Hopf Algebroid", 国際会議 "Infinite Dimensional Algebras and Their Applications to Quantum Integrable Systems", 2007年7月, アルガーヴ大学, ファーロ, ポルトガル

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野 均 (HITOSHI KONNO)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 00291477

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

神保 道夫 (JIMBO MICHIO)
立教大学・理学部・教授
研究者番号: 80109082

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)
神戸大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 80164672