様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月　２３日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2010
課題番号：１９５４００３９
研究課題名（和文）　レゾルベント型跡公式の一般化と保型形式の整数論

研究課題名（英文）　Resolvent type trace formulas, automorphic forms and number theory

研究代表者
権　寧魯（GON YASURO）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：３０３０２５０８

研究成果の概要（和文）：
保型形式は整数論を研究する際に現れる、多くの対称性をもつ重要な関数である。保型形式の研究において重要な道具のひとつである跡公式について研究を行い、いくつかのタイプの跡公式について整数論への応用に適した公式を証明した。それらの公式を用いて、ルエルゼータ関数やセルバーグゼータ関数といったいくつかの重要なゼータ関数について解析的な性質を証明した。

研究成果の概要（英文）：
Automorphic forms are important functions that appear when researching number theory. The trace formula is one of the most important tools in studying automorphic forms. We proved various formulas on some types of trace formulas, which is useful for application to number theory. Based on our results, we also proved analytic properties of Ruelle zeta functions and Selberg zeta functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論，保型形式

1．研究開始当初の背景

保型形式の整数論においては、保型L関数の解析的性質やL関数の特殊値、保型形式の周期などの意味付けやそれらの相互の関係を調べることは大きな主題のひとつである。セルバーグ跡公式は保型形式やゼータ関数を研究するための強力な道具であり、試験関数を選ぶことによって保型形式の整数論にさまざまな応用がある。しかし、扱うリー群の階数が1でない場合は、セルバーグ跡公式自身が大変複雑な形をしており、直接には応用しにくい形をしているのが現状である。

現在、さまざまな跡公式の簡易化、一般化が研究されており、保型形式の整数論の研究において重要な役割を果たしている。その際に、セルバーグ跡公式と本質的に同等な情報を含むレゾルベント跡公式の重要性や簡明性に導かれて、レゾルベント跡公式の一般化である「レゾルベント型跡公式」の理論の構築や、同様に整数論の研究に適しているような跡公式の一般化を

考察する必要が生じた。

2. 研究の目的

階数1のリー群の帯球関数はカシミール作用素から決まる2階の常微分方程式をみたす。 特異点をもつ解から離散群上平均化したポアンカレ級数を構成すると、これはラプラシアンのレゾルベント核となる。この積分作用素の跡を計算したものがレゾルベント跡公式である。これから、保型形式の次元公式やセルバーグゼータ関数の解析接続などが導かれるなどレゾルベント跡公式はセルバーグ跡公式と本質的に同じ情報を含んでいる。我々の研究目的はセルバーグ跡公式に代わるものとしてレゾルベント跡公式もしくはそれらの一般化であるレゾルベント型跡公式とその保型形式の整数論への応用を研究することである。

具体的には以下の：(1)、(2)、(3) について、レゾルベント型跡公式およびのその数論的応用を研究する。

(1) 低い階数のリー群上の特異点をもつ帯球関数からポアンカレ級数(グリーン関数)を構成し、それを積分核とする積分作用素の跡を計算した「ラプラシアンのレゾルベント跡公式」。

(2) 低い階数のリー群上の特異点をもつ(一般化された)球関数に微分作用素を作用させた関数からポアンカレ級数を作り(適当な重さを持った)カスプ形式との内積を2通りに計算した「内積タイプのレゾルベント型跡公式」。

(3) 上で得られた「レゾルベント型跡公式」に基づいて、数論的な応用を考察する。 例えば、階数2以上の群に対するセルバーグ型ゼータ関数の定式化を行い、それらの解析接続や関数等式を調べ、関連する代数体の分布の漸近公式、保型形式の周期を係数とするディリクレ級数の解析的性質と保型L関数の特殊値との関係などを調べたい。

上で考察するリー群としては階数2または階数1のリー群の直積の場合を主に扱う。

3. 研究の方法

(1) 非コンパクト双曲多様体に対するルエルゼータ関数について研究した。このゼータ関数は基本表現付きセルバーグゼータ関数の積に分解することが知られているので、因子に現れるセルバーグゼータ関数のそれぞれの解析的性質がわかればよい。この表現付きセルバーグゼータ関数を調べるには、対応するKタイプ付き跡公式にあらわれるユニポテント軌道積分のフーリエ変換がわかればよい。このタイプの重み付き軌道積分はホフマンによって調べられているので、彼の論文と関連する文献を詳細に検討することで各セルバーグゼータ関数の解析接続と関数等式を調べた。

(2) 階数1のリー群の複数個の直積となっている場合のラプラシアンのレゾルベント跡公式を研究した。対応する対称空間が上半平面複数個の直積の場合に、成分ごとのラプラシアンを考察した。まず、それらのラプラシアンの“直和ラプラシアン”のレゾルベント跡公式の研究を行った。例えば、このレゾルベント跡公式の幾何学的辺における総双曲な共役類の寄与はエフラットの跡公式に適当な試験関数を適用することで計算できる。いくつかの試験関数に対するエフラットの跡公式の局所項の変化を比較検討することで、差分型跡公式の着想を得た。次にKタイプの異なる跡公式の各局所項の変化を調べることで、跡公式の差分を調べた。次に, ヒルベルトモジュラー群の場合について、第2双曲共役類の寄与を明示的に計算した。その際に、“部分ポアソン和公式”が有効であった。

(3) 階数2以上の場合に、跡公式の幾何学的辺の双曲元を成分として含む共役類の寄与を調べることによって、セルバーグ型ゼータ関数の定式化について研究した。この場合考えている離散群の総双曲共役類の中心化群が無限巡回群にならず、セルバーグゼータ関数の定義が明瞭ではなかった。実際には双曲元を成分として含む共役類をいくつかに分割して、分割された部分双曲型共役類ごとに部分セルバーグゼータ関数を定義する必要があると思われた。双曲成分がひとつで、他の成分が楕円的になっている共役類を考察することでセルバーグ型ゼータ関数が定義できることがわかり、既に得ていた“跡公式の差分”を用いて、これらのセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質を調べた。

4. 研究成果

(1) 非コンパクトなカスプ付双曲多様体に対するセルバーグ跡公式について、セルバーグゼータ関数やルエルゼータ関数への応用を念頭において研究した。非コンパクトな双曲多様体に対するラプラシアンのスペクトルには離散スペクトルに加えて連続スペクトルも現れるなど、一般には跡族ではない。 また、跡公式の幾何学的辺には単位元、双曲的元に加えて、放物的元の寄与も現れるなどコンパクトな場合に比較して非常に複雑になっている。今回は、さらに非自明なKタイプをもつ試験関数に対して、跡公式を明示的に書き下す必要があり、跡公式の“不変部分”を取り出すのは困難に思われた。基本表現をKタイプにもつ試験関数に対して、セルバーグ跡公式の幾何学的辺の各局所項を詳細に調べることによって、セルバーグ跡公式の”不変部分”を取り出すことが出来た。特に、放物的元からの寄与である“重み付軌道積分”のフーリエ展開について、より明示的な公式を得た。今回得られた明示的な“不変”セルバーグ跡公式を用いて、セルバーグゼータ関数、ルエルゼータ関数につ

いて以下の結果を得た:
①非コンパクトなカスプ付双曲多様体に対する、非自明なKタイプを持つセルバーグゼータ関数の全平面への有理型解析接続、零点・極の決定，関数等式を示した。
② 非コンパクトなカスプ付双曲多様体に対する、ルエルゼータ関数の全平面への有理型解析接続，原点における特異位数の明示公式，関数等式を示した。

(2)ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ跡公式について研究した。Kタイプが自明であるエフラットの跡公式をKタイプが非自明な場合に拡張し、"重さ"が異なる二つの跡公式の両辺を比較することによって、スペクトル辺から特別な表現の系列を抽出した"跡公式の差分"を得た。得られた跡公式の差分を用いてセルバーグ型ゼータ関数を構成し、全平面への有理型解析接続や関数等式を証明した。一般に群の階数が高いとき跡公式は大変複雑な形をしているが、今回得られた方法で跡公式のある種の簡易化が得られることがわかり、そういった点でも興味深いと言える。Kを類数1の実二次体とするとき、その整数環の元を成分にもつ次数2の特殊線形群であるヒルベルトモジュラー群を考える。この群は上半平面二つの直積に不連続に作用し、カスプをただ1点もつ既約な離散部分群になる。先ず、エフラットの跡公式をKタイプが非自明な場合に拡張し、次に、マース作用素で移りあう"重さ"の組に対して、セルバーグ跡公式の両辺を比較することによって、特定の離散系列表現と主系列表現のテンソル積になっているような表現の系列をスペクトル辺にもつ"セルバーグ跡公式の差分"を得ることが出来た。得られた跡公式を用いて、上記表現の系列に相当するラプラシアンの組のスペクトルについての情報を与えるセルバーグ型ゼータ関数を構成し、解析接続を証明した。さらに、幾何学的辺に現れる各局所項を詳細に調べることによって、今回構成したセルバーグ型ゼータ関数の関数等式を得ることが出来た。

(3)ヒルベルトモジュラー多様体に対するセルバーグ型ゼータ関数について研究を行った。ヒルベルトモジュラー群のあるタイプの双曲－楕円共役類に対して、ある種のセルバーグ型ゼータ関数を定義した。1次のときはモジュラー群に対するセルバーグゼータ関数と一致し、解析的性質はよく知られている。2次のときは既に研究を行ったセルバーグ型ゼータ関数に一致する。これらのセルバーグ型ゼータ関数は、エフラットの跡公式をいくつか組み合わせることによって全平面への有理型解析接続が示せることが分かった。重さの異なるエフラットの跡公式を組み合わせて得られる跡公式の差分には、そのスペクトル辺に主系列表現と特定の離散系列のテンソル積になっている表現の系列が現れるなど、跡公式のある種の細分化になっており、そういった点でも大変興味深いといえる。

(4)階数1のリー群二つの直積の離散部分群Γの総双曲共役類から構成されるセルバーグ型ディリクレ級数とその解析的性質から導かれる漸近公式について研究を行った。離散部分群Γの楕円-双曲共役類から定義されるセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質を調べる際に重要だったのは、重さの異なるセルバーグ跡公式の差分から得られる跡公式の細分化であった。しかし、跡公式の差分を考えている限りは，セルバーグ原理により総双曲共役類の寄与がすべて消えてしまう。よって、跡公式の差分型でないようなある種の跡公式の細分化を考える必要が生じた。つまり、もともとの跡公式から十分たくさんの総双曲共役類の寄与が消えていて、かつ十分たくさん残っているような"切断された跡公式"を考察する必要があった。ガンゴリが階数1の局所対称空間に対してセルバーグゼータ関数を定義するのに用いた試験関数を少し修正した"重み関数"を用いて、離散群の総双曲共役類上の関数をその各成分の"対相関関数"として定義し、それをフーリエ変換した試験関数を考察した。このようにして得られた試験関数はよい性質を持ち跡公式に適用可能で、十分たくさんの総双曲共役類上で消えていることがわかった。得られた"切断された跡公式"を用いて、特に幾何学的辺の総双曲共役類からある種のセルバーグ型のディリクレ級数が定義できることがわかり、その解析的性質を調べることが出来た。このセルバーグ型のディリクレ級数はある右半平面で絶対収束し、それを含むある右半平面まで有理型に解析接続されることが示された。特に、いくつかの極の留数がその位置によらず、"重み関数"の定積分だけで決まることがわかった。これから、各総双曲共役類の中心化群の生成元たちから決まる"レギュレーター"の制限された漸近和が求まり、解析数論的にも大変興味深いと言える。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

①Y. Gon, Differences of the Selberg trace formula and Selberg type zeta functions for Hilbert modular surfaces, 数理解析研究所講究録 1715 (2010), 64-74. 査読なし
②Y. Gon and J. Park, The zeta functions of Ruelle and Selberg for hyperbolic manifolds with cusps, Math. Ann. 346 (2010), 719-767. 査読有り
③Y. Gon and J. Park, Ruelle zeta function for odd dimensional hyperbolic manifolds with

cusps, Proc. Japan Acad. 84A (2008), 1-4. 査読有り
④Y. Gon, N. Kurokawa and H. Oyanagi, Multiple q-Mahler measures and zeta functions, J. Number Theory 124 no.2 (2007), 328-345. 査読有り

〔学会発表〕(計9件)
①Y. Gon,
Mahler measures and their generalization, The Eve of IMI and FM, Ito One Day Workshop, 2011 年 3 月 29 日, 九州大学
②Y. Gon,
Truncated Selberg type Dirichlet series and asymptotic formulas, 研究集会"Zetas and Limit Laws 2010", 2010 年 11 月 7 日, 沖縄コンベンションセンター
③Y. Gon,
Selberg type zeta functions for the Hilbert modular group of a real quadratic field, 仙台整数論集会, 2010 年 10 月 9 日, 東北大学
④権　寧魯,
Selberg 跡公式, Selberg ゼータ関数, 第18回整数論サマースクール"アーサー・セルバーグ跡公式入門", 2010 年 9 月 6 日, 山中温泉河鹿荘ロイヤルホテル
⑤権　寧魯,
ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ跡公式の差分とセルバーグ型ゼータ関数, RIMS 研究集会「保型形式・保型表現およびそれに伴う L 函数と周期の研究」, 2010 年 1 月 19 日, 東京大学
⑥Y. Gon,
Selberg type zeta functions for the Hilbert modular varieties, 研究集会"Zetas and Limit Laws 2009", 2009 年 11 月 16 日, カルチャーリゾートフェストーネ
⑦権　寧魯,
Selberg zeta 関数の行列式表示, 研究集会"ゼータ関数の行列式表示", 2008 年 3 月 27 日, 東京工業大学
⑧権　寧魯,
オイラー五角数定理から保型形式へ, ENCOUNTER with MATHEMATICS, 第42回 Euler 生誕300年, 2007 年 12 月 1 日, 中央大学
⑨Y. Gon,
Generalized Mahler measures and multiple q-Mahler measures, Postech-Japan Number Theory Symposium, 2007 年 4 月 28 日, Postech, Korea

6. 研究組織
(1)研究代表者
権　寧魯(GON YASURO)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号:30302508