様式 C-7-2

自己評価報告書

平成２２年　３月３１日現在

研究種目：　基盤研究（Ｃ）
研究期間：　2007～2010
課題番号：　１９５４００４４
研究課題名（和文）有限群と多元環のモジュラー表現と整数表現

研究課題名（英文）Modular and integral representations of finite groups and algebras

研究代表者
河田　成人（KAWATA SHIGETO）
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：　５０１９５１０３

研究代表者の専門分野： 数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・代数学
キーワード：　表現論，有限群，群環，多元環，概分裂列，Auslander-Reitn 有向グラフ

１．研究計画の概要

有限群のモジュラー表現（正標数の体上の表現）においては，ワイルド表現型と呼ばれるブロックの Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分（以下 AR 成分と省略）の形は半平面状の格子型かあるいはチューブと呼ばれる半無限の筒型であるという Erdmann の重要な結果を基礎とした上で，研究を進める．表現加群の全体がなすカテゴリーのなかで，単純加群の持つ意味合いを探求するために AR 成分が利用できないか考える．多くの例を見れば，単純加群は AR 成分の端点に位置しているが，単純加群の AR 成分における位置が意味する所を模索する．その一方で，AR 成分の端点に位置しない単純加群が現れる有限群はどのようなものなのか，特徴付けをしたい．また，単純加群の他にも，置換加群など重要な役割をする表現加群があるので，それらの表現加群がどのような形状の AR 成分に属してどのような場所に位置にするのか，そしてその位置の意味するところが群の構造とどのように関連しているのかを解き明かしていきたい．

有限群の整数表現（完備離散付置環上の表現）においては，AR 成分の形状の決定を目標として研究を進める．モジュラー表現における Erdmann の定理と類似の主張が整数表現でも成立するのではないかと予想している．特に，既約加群や射影加群，置換加群などが重要と思われるので，そのような表現加群を含む AR 成分について注視する．整数表現のときにはある種の既約加群は AR 成分の端点に位置することは既に証明したので，これら既約加群を端緒として考察を始める．さらには既約加群を含む AR 成分を何らかの部分群と関連づけて制限・誘導などの操作を施したとき，どのような AR 成分が現れるのか，観察を行いたい．さらに AR 成分の端点に位置するような表現加群はどのような性質を持つものなのかを模索する．

なお，有限群のモジュラー表現と整数表現とは密接に結びついている． AR 成分についてもモジュラー表現と整数表現との間の関係を追求していくことで，モジュラー表現における AR 成分について知られている結果を，整数表現の AR 成分に反映させることができるのではないかと期待している．

２．研究の進捗状況

Auslander-Reiten 理論を活用して有限群の整数表現の研究を進めた．まず，射影的整数表現加群を AR 成分のなかで考察することで，いわゆる Heller 格子と呼ばれる整数表現加群の重要性を認識することができた．Heller 格子とは，モジュラー表現加群を整数表現と見なしたときの射影被覆の核となっているような整数表現加群のことである．例えば，射影的整数表現加群の根基は，単純なモジュラー表現加群の Heller 格子である．この Heller 格子について，対応するモジュラー表現加群が直既約であれば，Heller 格子も直既約であることが証明できた．また Heller 格子の概分裂列を研究することで，Heller 格子の一般的な特徴付けを行うことができた．さらに Heller 格子を含む AR 成分の形状を決定できたが，その結果として，一般の整群環においては，少ない例外を除いて，いわゆる Euclid 型の形状の AR 成分は現れないことが分かった．

次に，自明なソースを持つ整数表現加群が

どのような形状の AR 成分に存在しているのか，またその AR 成分の中のどのような場所に位置しているのか，ということを考察した．ここで，自明なソースを持つ加群とは，置換加群の直和因子として現れるような直既約加群のことである．代数閉体上のモジュラー表現においてはいくつかの例外を除いて，自明なソースを持つ加群を含むような AR 成分の形状は半平面的に広がる格子型であり，さらに自明なソースを持つ加群はそのグラフ内の端点に位置することが知られていた．では，整数表現ではどのようなことが成り立つかが問題となるが，完備離散付値環の分岐指数が 3 以上の時には，いくつかの有限群の例外を除いて，モジュラー表現の場合と同様の事実が成り立つことを示すことができた．なお，有限群の位数が素数巾の時には，完備離散付値環の分岐指数に関する条件が不必要であることも分かった．

３．現在までの達成度

②おおむね順調に進展している．

（理由）

有限群の整数表現における AR 成分の形状の決定を大きな目標として研究を進めている．モジュラー表現においては，自明なソースを持つ加群を含む AR 成分の形状が半平面状に広がった格子型かチューブであれば，それ以外の AR 成分の形状もそのようになることが分かっているが，整数表現においても類似のことが成り立つと予想されている．研究の進展状況で上述したように，整数表現において，自明なソースを持つ表現加群を含む AR 成分の形状をかなり把握することができた．このことは，モジュラー表現の例から類推できるように，整数表現の AR 成分の形状についての問題解決に向かって良い状況証拠が得られたものと思われる．

４．今後の研究の推進方策

有限群の整数表現における AR 成分の一般的な形状がどのようなものかを追求したい．それと平行して，対称群やリー型の有限群などの重要な有限群の表現において，既約加群や射影加群を含む AR 成分についても考察したい．

また，群の表現論において特有の性質として表現加群のテンソル積があるが，整数表現における Auslander-Reiten 理論とテンソル積との関連を探りたい．階数が群環の係数体の標数と互いに素であるような表現加群は分裂トレース加群と呼ばれる興味深い加群である．この加群と，自明な整数表現加群を含む AR 成分とのテンソル積を考察することによって，分裂トレース加群を含むような AR 成分についても調べる．

５． 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Shigeto Kawata, On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings, Journal of Algebra 322 (2009), 1395-1405, 査読有

② Shigeto Kawata, Erratum to “On Heller lattices over ramified extended orders”, Journal of Pure and Applied Algebra 212(2008), 1849-1851, 査読有

③ 河田成人，群環の Heller 格子について，数理解析研究所講究録 1564(2007), 70-75, 査読無

〔学会発表〕（計４件）

① 河田成人，群環の自明なソースを持つ加群と Auslander-Reiten quivers, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会，平成 21 年 9 月 27 日,大阪大学

② 河田成人，Auslander-Reiten components and trivial source modules for integral group rings, 表現論セミナー， 平成 21 年 2 月 21 日,信州大学

③ Shigeto Kawata, On Auslander-Reiten components of type A-infinity for integral group rings, Algebra Seminar, 平成 20 年 12 月 17 日,大阪府立大学

④ Shigeto Kawata, Heller lattices and Auslander-Reiten quivers for integral group rings, 第12回多元環の表現論国際会議，2007年8月23日，ニコラウス・コペルニクス大学(トルン，ポーランド)