

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540045

研究課題名(和文) 代数群の modular 表現

研究課題名(英文) Modular representations of algebraic groups

研究代表者

兼田正治 (KANEDA MASA HARU)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60204575

研究代表者の専門分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群論, 表現論

1. 研究計画の概要

最近, Lusztig は, 正標数の reductive 群 G の既約指標に関する自身の予想を拡張する形で, G の Lie 環の表現に関する非常に興味深い予想を提出し, それに答えるべく

Bezrukavnikov, Mirkovic と Rumynin, 以下 [BMR] と略記, は crystalline differential operators なるものを用いる代数解析的方法を提示した。則ち, G の定義する flag variety G/B 上の crystalline differential operators のなす層を $\mathbb{Y}cD$ と記すと, [BMR] は, $\mathbb{Y}cD$ 上の coherent modules が成す bounded derived category と $\mathbb{Y}cD$ の global sections のなす環 D 上の有限生成加群の成す bounded derived category が derived global section functor によって三角圏同値になり, D は G の Lie 環の universal enveloping algebra の central reduction と同型であることを証明した。

この結果に触発されて, 我々は, その代数版, 或いは, 無限小版を調べたい。則ち, $\mathbb{Y}cD$ の central reduction である G/B の構造層の Frobenius direct image の endomorphism ring $\mathbb{Y}\bar{c}D$ を考えて, それに対して, 上記 [BMR] のように derived global section functor による三角圏同値が成立するかどうかを調べる。これは, G/B の構造層の Frobenius direct image が tilting であることがほぼ同値であることが分かっており, G/B が projective space である場合, この時は, B は Borel 部分群ではなく極大 parabolic 部分群になる, また, $G=SL_3$ の場合には, 実際成立することも分かっていた。

2. 研究の進捗状況

上記問題を $G=Sp_4$ の時に葉家琛との共同研究により G/B 上で解明した後, 実は, G/B の構造層の Frobenius direct image の中に complete strongly exceptional poset を成す層が, $W^{\wedge}P$ によって parametrize されて, それらの間の hom space が対応する $W^{\wedge}P$ の元の Chevalley-Bruhat order によって 0 か否かが決まって, 現れていることを発見した。ここで, $W^{\wedge}P$ は G の Weyl 群の P の Weyl 群による coset representative の集合である。これらの直和を $\mathbb{Y}cE$ と書くと, $\mathbb{Y}cE$ の endomorphism ring 上の有限次元右加群のなす bounded derived category と G/B 上の coherent sheaves のなす bounded derived category が三角圏同値になることが分かる。更にこれらの層は, 整数環上定義されているので base change により複素数体上に持って行くことが出来る。この現象が G の rank が 2 以下で G/P 上において成立つことが, 葉家琛との更なる共同研究によって分かった。特に, $G=Sp_4$ で $P=B$ の時, また G が G_2 型の時には, 複素数体上にもこのような層の存在は, 予想されてはいたが, 知られていなかった。

これらの結果は, G/P の構造層の Frobenius direct image の分解の様子が, P の 1 次元 trivial 加群を G_1P へ誘導した加群の構造が制御することに注目して得られた。ここで, G_1 は G の Frobenius kernel。従って, この誘導表現の構造についての詳しい結果が求められるが, それについても面白い現象が観察出来ている。特に, G/P が projective space の時には, dimension に係わらず非常に綺麗に現れてきている。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由)

上記, G/P 上の coherent sheaves のなす category を記述する $W^{\wedge}P$ によって parametrize される特別な層が, G/P の構造層の Frobenius direct image の中に現れたことの発見には, 自身驚いた。元来, これらの層の存在は複素数体上での話であり, それらを正標数上で構成できたことは興味深く, 「当初の計画以上に進展している」と言えよう。

4. 今後の研究の推進方策

上記結果が一般の G/P で成り立つかどうかを調べるのであるが, それには, 上記, 誘導表現の研究が肝心になる。表現論と代数幾何学の手法をを幅広く取り入れていくことが必要になる。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① Kaneda M., On the structure of parabolic Humphreys-Verma modules, RIMS $Ky\to\{u\}$ roku Bessatsu $\{B11\}$ (2009), Pages 117-123 査読有り

② Kaneda M., The structure of Humphreys-Verma modules for projective spaces, J. Alg. Volume 322, Issue 1, 1 July 2009, Pages 237-244 査読有り

③ Kaneda M., Kapranov's tilting sheaf on the Grassmannian in positive characteristic, Alg. Repr. Th. 11 (2008), 347-354 査読有り

④ Kaneda M., Naito S. and Kapranov's tilting sheaf on the Grassmannian revisited, 第10回代数群と量子群の表現論研究集会報告集 (2008), 188-197 査読無し

⑤ Kaneda M. and Ye, J., Equivariant localization of \bar{D} -modules on the flag variety of the symplectic group of degree 4, J. Algebra 309 (2007), 236-281 査読有り

[学会発表] (計12件)

① Kaneda M., Representation theory of $F_0\{G/P\}$, 2010/3/24 Algebra Seminar, Aarhus Universitet

② Kaneda M., Representation theory of $F_0\{G/P\}$, 2009/11/18 談話会, 名古屋大学多元数理科学研究科

③ Kaneda M., On the structure of the Frobenius direct image of the structure sheaf of G/P , 2009/5/7 $S\{e\}$ minaire de

$g\{e\}$ om $\{e\}$ trie alg $\{e\}$ brique, IRMAR (b $\{t\}$ a $\{t\}$ iment 22), Universit $\{e\}$ de Rennes 1, Campus de Beaulieu

④ Kaneda M., On the G_1 -structure of parabolically induced modules, 2008/11/18 East China Normal University

⑤ Kaneda M., On the structure of parabolic Humphreys-Verma modules, 組合せ的表現論の拡がり, 2007/10/25, 数理解析研究所