

平成23年6月30日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540050

研究課題名(和文) アファイン幾何結晶の構成と結晶基底の表現論

研究課題名(英文) Construction of affine geometric crystals and
Representation theory of crystal bases

研究代表者

中島 俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60243193

研究成果の概要(和文)：幾何結晶の構成は、最も単純なKR加群の場合であるがほとんどの affine Kac-Moody 群に対応するものについて結果を得た。tropical R 写像については、いくつかについて具体的に構成できた。また、 sl_2 の場合のみではあるが、普遍的 tropical R 写像を得ることに成功した。さらに、概均質幾何結晶についての判定条件を結晶基底の言葉で記述することもでき、これにより tropical R 写像の一意性について比較的簡単に示せるようになった。イプシロン系を A 型の場合だけであるが、具体的に構成できた。

研究成果の概要(英文)：For most affine Kac-Moody algebras, we constructed geometric crystals associated with the simplest KR modules. We also obtained tropical R maps explicitly. Furthermore, only for $sl(2)$ -case, certain universal type tropical R maps have been constructed. As a criterion for homogeneity of geometric crystals, we showed that the crystal obtained by the ultra-discretization is connected. By this criterion, it turns out that we can show easily the uniqueness of tropical R maps. We got epsilon systems of type A.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：量子群の表現論、結晶基底の理論

科研費の分科・細目：数学 代数学

キーワード：結晶基底、幾何結晶、超離散化、ヘッケ環、代数群、Tropical R 写像、保型形式

1. 研究開始当初の背景

結晶基底の理論は1990年代に登場し、現

在では、代数的な表現論の世界のスタンダードとなっている。この結晶基底の理論がも

ともとの研究テーマであった。結晶基底の理論は表現論のみならず、組合せ論や数理解物理学などにも大きな影響を与えた。

2000 年になってこの理論を幾何学的な方向から捉える理論が登場した。それが、幾何結晶の理論であり、幾何学のトロピカル理論や数理解物理の超離散化の方法とマッチし、世界の新しい潮流の1つとなっている。

2. 研究の目的

Affine Kac-Moody 代数と呼ばれるクラスの無限次元リー代数に対応する幾何結晶を具体的に構成し、さらにその上のトロピカル R 写像と呼ばれる Yang-Baxter 方程式を満たす双有理写像を具体的に構成すること。さらには、そうしたものの超離散化を実行し、既存の組み合わせ R 写像との同一性を調べる。

3. 研究の方法

Affine Kac-Moody群のunipotent 部分群上もしくは、可積分加群上のある種の不変関数を求めること。また、epsilon system と呼ばれるトロピカルR写像に対してよい振舞いをする関数族をもとめること。特に、ある種の epsilon system はよく知られた小行列式で実現できるので、計算機を使った具体的な計算が可能になることを利用し、様々な計算を実行した。

4. 研究成果

(1)アファイン幾何結晶及びそれに付随するトロピカル R マップの具体的な構成を行っ

た。

具体的には、アファイン A^D 型の無限系列の Kac-Moody 群に対して、アファイン幾何結晶を構成し、その超離散極限とそのラングランズ双対の完全結晶の極限が同型になることを示した。さらに、各型についてトロピカル R 写像を具体的に構成することに成功した。また、 $D_4^{(3)}$ という例外型のアファインタイプに対してその幾何結晶を具体的に構成した前年の結果から山根によって構成された $G_2^{(1)}$ 型の完全結晶の極限が超離散化の方法により得られることをしめした。また、epsilon system と呼ぶある種の幾何結晶上の有理関数の集合がよい性質をもつこともわかってきた。特に、トロピカル R 写像に対しての普遍性と積構造が入ることを明らかにした。

(2) ある種のトロピカル R 写像は幾何結晶の概均質性により一意に決定されることもわかった。幾何結晶の概均質性とは幾何結晶の作用素 e_i による開稠密な軌道が存在することである。我々は、正構造を持つ幾何結晶の概均質性の判定条件が、その超離散化として得られる結晶基底が連結性によって与えられることも合わせて示した。完全結晶はそれ自身及びそれらのテンソル積も連結であることが知られているおり、それにより我々が構成したアファイン幾何結晶が概均質であることがわかり、最終的にトロピカル R マップの一意性がわかるのである。

また、旗多様体上の幾何結晶と冪単部分群上の幾何結晶の同値性についてすでに出来上がっている A 型以外の B,C,D 型についても示すことができた。

(3) 五味はマルコフトレースについての研

究をより一般の場合に拡張することについて研究をすすめている。篠田は有限ユニタリ一群について研究をすすめている。都築は保形形式について精力的に研究を推進している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- (1) 中島俊樹 (M.Igarashi), Affine Geometric Crystal of type $D^{(3)}_4$, Contemporary Mathematics, 506, 215-226, (2010), 査読有.
- (2) 中島俊樹, Universal tropical R map of $sl(2)$ and prehomogeneous geometric crystals, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B11, 101-116, (2009), 査読有.
- (3) 中島俊樹 (M.Kashiwara M.Okado), Affine Geometric Crystals and Limit of Perfect Crystals, Transactions in American Mathematical Society, 30, 3645-3687, (2008), 査読有.
- (4) 中島俊樹, Affine Geometric Crystal of type $G^{(1)}_2$, Contemporary Mathematics, 442, 179-192, (2007), 査読有.

[学会発表] (計5件)

- (1) 中島俊樹, "Admissible Pictures and Littlewood-Richardson Crystals", International Workshop on Combinatorial and Geometric approach to Representation Theory, 2009年9月21日 Seoul National University, Korea.
- (2) 中島俊樹, "Epsilon Systems of geometric Crystals", Geometric Aspects of Discrete and Ultra-Discrete Integrable Systems, (A satellite meeting of the Isaac Newton Institute Programme on Discrete Integrable Systems), 2009年3月31日, The University of Glasgow, United Kingdom.
- (3) 中島俊樹, "Geometric Crystals on flag varieties and maximal unipotent subgroups",

Workshop, 'Crystals and Tropical Combinatorics', 2008年8月30日, Kansai Seminar House, 京都.

- (4) 中島俊樹, "Affine Tropical R and Prehomogeneous Geometric Crystals", Quantum Affine Lie Algebras, Extended Affine Lie Algebras, and Applications, 2008年3月5日, Banff International Research Stations, Canada.
- (5) 中島俊樹, "Uniqueness of tropical R", 「組合せ論的表現論の拡がり」, 2007年10月25日, 京都大学数理解析研究所.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中島 俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)
上智大学理工学部教授
研究者番号：60243193

(2) 研究分担者

篠田 健一 (SHINODA KEN-ICHI)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：20053712

都築 正男 (TSUZUKI MASAO)
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号：80296946

五味 靖 (GOMI YASUSHI)
上智大学・理工学部・講師
研究者番号：50276515