

機関番号：32644
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2010
 課題番号：19540052
 研究課題名（和文）対称群が作用するゼロ次元ゴレンスไตน์環
 研究課題名（英文）Artinian Gorenstein rings with the action of the symmetric group
 研究代表者
 渡辺 純三（WATANABE JUNZO）
 東海大学・理学部・教授
 研究者番号：40022727

研究成果の概要（和文）：本研究では、多項式環に対称群を作用させたとき、不変イデアルによる商環に対して、ワイルの相互法則が有効に適用出来ることを明らかにした。その過程で、対称群のヤング部分群による多項式の余不変式環が強いレフシェッツ性を有することを証明した。主な成果は次の通りである。(1) 「高次ヘシアン」という概念を導入することによって、一次式がレフシェッツ元である為の必要十分条件を与えた。(2) 対称群のヤング部分群による余不変式環が強いレフシェッツ性を有することに証明を与えた。(3) 多項式環の Differential 加群の外積代数に対称群を作用させたときの既約分解をもとめた。(4) 3変数巾和多項式が正則列になるための条件を予想し、その部分的な場合を証明した。

研究成果の概要（英文）：We let the symmetric group act on the polynomial ring, and used the Weyl duality to obtain certain results on the invariant coalgebras by Young subgroups of the symmetric group. As results, we obtained the following. (1) We introduced the notion of higher Hessians and using it, we characterized the strong Lefschetz elements in Artinian Gorenstein local rings. (2) We proved that the coalgebras of invariants by the Young subgroups have the strong Lefschetz property. (3) We obtained the irreducible decomposition of the exterior algebra of the differential module over the polynomial ring. (4) We showed some properties of power sums of symmetric functions in three variables and made a conjecture to the problem to ask in which choice of degrees the power sums form a regular sequence.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：可換環論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：完全交叉、レフシェッツ性、ヘシアン、高次ヘシアン、ジョルダン標準形、ゴレンスไตน์環、完全交叉環

1. 研究開始当初の背景

1985年夏、京都における日米合同研究会において、渡辺（報告者）は、アルティン局所環に「デイルワース数」を導入し、この研究会に参加していた国内外の多くの研究者の関心を引いた。また、その後数年間は、本研究の進展状況について、問い合わせをしばしば受けた。私の研究プログラムは、アルティン環の「デイルワース数」を完全交叉環、乃至、ゴレンスタイン環に対して求めることにより、アルティン環の理解に寄与しようというものであった。しかしこの問題は非常に困難な問題であることが次第に明らかになり、大方の研究者はこの問題から撤退し、その後15年間は、定義を導入したこと以上の発展はみられなかった。また、多くの研究者がこの問題の意義について疑問を表明しはじめた。たとえば D. Eisenbud は、“It is too difficult to be true”と言い、C. Hunekeは、“It is a tough problem”と言い、J. Herzog は、“You chose a difficult problem”と言う有様であった。Eisenbud は、この当時（1995–96）、反例が出来ると確信していたようである。Eisenbud の提案した反例の構成法を述べると、3変数のジェネリックな斉次多項式を3つ選び、強いレフシェッツ条件を持たない条件を係数に impose すれば、それが反例である、というものであった。しかし、この論法には欠陥がある。というのは、レフシェッツ条件を係数に impose した瞬間、完全交叉でなくなる可能性があるからである。すなわち、この方法で反例を得るためには、最後に終結式がゼロにならない事を証明する必要が生じる。結局、この方法では、元の黙阿弥になり、議論が堂々巡りするだけである。いずれにしても、この問題は大家にとっても、困難な問題であったことは確かなことである。同時に、多くの大家がこの問題に興味をもったことも確かである。最初の Break through は、2003年、張間忠人、J. Migliore、U. Nagel等との共同研究による、ベクトル束の理論を応用した論文において、3変数完全交叉環の弱いレフシェッツ性を証明したことによって得られた。この成功により、完全交叉のレフシェッツ問題が進展し始めた。また、国外でこの問題に関心をもつ研究者が増え始め

た。次数付環のレフシェッツ性問題を考えることの重要性は、日本の研究者にはあまり関心が持たれていないようにも見えるが、海外では年々着実に研究論文が書かれている。レフシェッツ性問題は、今後ますます可換代数の研究において重要なテーマの一つになるであろう。また、我々の予想の正しさについては、疑問の余地は殆どなくなっている。

2. 研究の目的

本研究の究極の目標は、標数ゼロの完全交叉環に強いレフシェッツ性が成立することを証明することであり、その定理が証明された暁には、その内容がだれにでも理解でき、代数幾何学の Hard Lefschetz Theorem のアナロジーという意味もあり、代数学の根幹的な定理となることは間違いない。また、反例があったとしても、それは、非常に興味深い完全交叉であると予想される。（もともと、反例が存在する可能性はないであろう。）

本研究の目的は、次の6つの問題について考察し、解決することである。

問題1 完全交叉は強レフシェッツ性をもつか。

問題2 対称多項式が生成する完全交叉は強レフシェッツ性をもつか。（問題1の特殊な場合である。）

問題3 完全交叉イデアルのジェネリックイニシャルイデアルを決定せよ。

問題4 レフシェッツ条件をもたないゴレンスタイン環を決定せよ。

問題5 特にヘシアンが消える多項式を特徴づけよ。

問題6 ジェネリックな線形連立微分方程式の（代数的な）解は、直線化規則をもつ次数付き環（algebra with straightening law）であることを証明せよ。

3. 研究の方法

いくつかのゼロ次元ゴレンスタイン環は、あるクラスの代数多様体のコホモロジー環として現れる。（あるクラスの代数多様体とは、 G/P 、

ただし、 G は半単純代数群、 P は、放物型代数群の形のものである。) その特徴は、(1) ソークル元が一次式の積としてとれること (厳密には、標準加群の生成元というべき)、(2) その多様体に有限半順序集合が対応していること、(3) その半順序集合は、Sperner性を有すること、(4) 完全交叉環であること等が挙げられる。本研究では、2007年以来4年間、これらのゴレンスタイン環について、様々の角度から解明を深め、強いレフシェッツ性がなりたつ理由・メカニズムをとらえると言う方針で研究を推進してきた。これらの完全交叉環は、大きな系列を形作っており、それらを族として同時に考えることにより、その族に属する全てのメンバーが、強いレフシェッツ条件を満たすことを帰納的に証明できることが大きな特徴である。これらの特徴から、特殊な1次式が存在を仮定し、それが、帰納法にたいして有効に働くというセットアップをすれば大量のゴレンスタイン環に対して強いレフシェッツ条件を証明出来るのではないかという示唆を受ける。そのセットアップとは、(簡単化していうと) 完全交叉環のイデアルの「生成系の内の一つが、一次式の中になりえる」という条件であり、意外にも多くの場合に適用できる。

一方、強いレフシェッツ性をもたないゴレンスタイン環についての研究も、完全交叉環のレフシェッツ性の研究と平行して進める必要があるのは明らかである。このような例は、もっとも簡単な場合、アルティン環の標準加群のイデアル化として得られる。此に関しても未解決で重要な課題が山積している。まず、永田雅宜によって導入された、「イデアル化の原理」そのものが十分理解されているとは言い難い。したがって、イデアル化の意味を解明する必要がある。次にGordan-Noetherによる、Hessianの消える多項式に関する論文は、数学史上始めてヘシアンを扱ったものであるが、この論文が十分理解されているとは言い難い。

ヘシアンが消える多項式は5変数で始めてあらわれる。これは、2つの線形微分方程式の解として特徴づけられるのだが、このことは、現代の可換環論の専門家には、あまり知られていないようだ。さらに6変数以上の場合は、全く手つかずの状態である。しかも、このことが、レ

フシェッツ条件をもたないゴレンスタイン環と密接に関連している。

これは、1985年、渡辺によって指摘されていた。また、それに先立つ1983年のStanleyの“Combinatorics and commutative algebra”にも、ユニモーダルでないヒルベルト関数をもつゴレンスタイン環の例として使われている。この当時、強いレフシェッツ性の概念はなかったのであるが、ユニモーダルでなければ当然強いレフシェッツ性のみならず、弱いレフシェッツ性ももたないのは明らかである。

上記の諸々の事実を考慮すれば、次の様に予想するのが自然である。

- (1) 対称式が生成する完全交叉環は、強いレフシェッツ性を有する。(言うまでもなく、単に完全交叉であれば、それだけの条件で強いレフシェッツ性をもつことを証明したいのだが、条件を強くして証明を模索しようということである。)
- (2) 標準加群のイデアル化の原理で得られるゴレンスタイン環は、自明な場合を除き、完全交叉環ではない。(ここでいう自明な標準加群がその環と一致する場合である。)

上記の様な考えから本研究では、2007年以来4年間を通して、強いレフシェッツ性を有しないゴレンスタイン環の解明を行うと同時に、ある条件をもつ完全交叉環の全体を一つの族と捉えることにより、様々の角度から強いレフシェッツ条件の研究を行った。代数幾何、表現論、組み合わせ理論、微分方程式の専門家に協力を求め、張間忠人氏、森田英章氏、前田俊昭氏、和地輝人氏、沼田泰英氏等と、年数回の研究会を重ね、情報・意見交換し、研究を推進させた。

4. 研究成果

- (1) 本研究では、アルティン環に対して、中心的単純加群という概念を導入し、それを使った新しい証明手段の開発により、強いレフシェッツ性をもつ完全交叉の大量の例を構成することができた。
- (2) 得られた結果のうち、もっとも一般的な定理は、次のものである。即ち「部分環

の上に平坦な拡大環が強いレフシェッツ条件を持つために必要十分条件は、そのファイバーとベースが同じ条件をもつことである。」これは様々な場合に適用される。「族全体が、平坦拡大で閉じており、ベースとファイバーが強いレフシェッツ性を持てば、その族の全てのメンバーが強いレフシェッツ条件をもつ。」

- (3) 原正雄氏との共同研究で、ブール代数から自然に現れる正方隣接行列の行列式の値を決定した。
- (4) 池田ひでみ氏との共同研究で、有限半順序集合におけるディルワース束が、アルティン環においても定義され、期待通りに振る舞うことを証明した。
- (5) 19世紀後半に Gordan と Noether によって書かれた、“Ueber die algebraischen Formen deren Hessesche Determinante identisch verschwindet” を解明し、これを一般化することにより、ゴレンスタイン環の一次式が、強いレフシェッツ元であるための特徴づけを得た。そのことから、ゼロ次元ゴレンスタイン環で、強いレフシェッツ条件をもたないものを決定した。
- (6) 2009年1月、第21回可換環論セミナーで「Hesse形式とSLP」と題して講演を行った。19世紀後半に書かれた、Paul Gordan と Max Noether による Hessian に関する論文 (Mathematische Annalen 10 掲載) を現代的立場から解釈することが、SLP の解明に密接に関連していることを紹介した。少なくともゴレンスタイン環の強いレフシェッツ性の第一条件に関しては、それに対応する斉次多項式の Hessian が恒等的に消えるか否かで判定できるというこの結果は、完全交叉のレフシェッツ性問題への解決の糸口になるはずである。
- (7) 2008年3月、イラン国 I P M (物理・数学研究所) において、「On the Hessian of homogeneous polynomial」と題する講演を行った。これは、Gordan-Noether の理論が如何に「強いレフシェッツ条件」に関わっているかを紹介したものである。
- (8) 2007年3月、Padova 大学で「Commutator algebra of a nilpotent matrix」と題する講演をおこなった。これは、可環代数を非可換代数の一部としてとらえる事が、Gorenstein 環の強いレフシェッツ性問題に有効であることを紹介したものであり、その後の Aldo Conca および Christian Krattenthaler との共同研究に繋がった。
- (9) 完全交叉のレフシェッツ性問題に関するこれまで5年間の研究成果をもとにして、和地、森田、前野、沼田とともに、大学院生や若い研究者向けの本を執筆してい

る。23年度中に完成させホームページで公開するとともに、専門誌へ投稿する予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Toshiaki Maeno and Junzo Watanabe, Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials, Illinois Journal of Mathematics, 53 巻 591–603 (2009), 査読有
- ② Hidemi Ikeda and Junzo Watanabe, The Dilworth lattice of Artinian rings, Journal of Commutative Algebra, 1 巻 315–326 (2009), 査読有
- ③ Aldo Conca, Christian Krattenthaler and Junzo Watanabe, Regular sequences of symmetric polynomials, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 121 巻 179–199 (2009), 査読有
- ④ Hideaki Morita, Akihito Wachi, and Junzo Watanabe, Zero-dimensional Gorenstein algebras with the action of the symmetric group, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 121 巻 45–71 (2009), 査読有
- ⑤ Masao Hara and Junzo Watanabe, The determinants of certain matrices arising from the Boolean lattice, Discrete Mathematics, 308 巻 5815–5822 (2008), 査読有

[学会発表] (計2件)

- ① 渡辺純三、Hesse形式とSLP、第21回可換環論セミナー、2009年1月26日、北海道教育大学釧路校
- ② 渡辺純三、(森田英章、和地輝人との共同研究) The differential module of the polynomial ring with the action of the symmetric group、第29回可環論シンポジウム、2007年11月20日、愛知県愛知厚生年金会館

6. 研究組織

研究代表者

渡辺 純三 (JUNZO WATANABE)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：40022727