

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19540053

研究課題名 (和文)  $p$  進楕円ディオファントス近似を用いた abc 予想への新しい橋渡し

研究課題名 (英文) A new bridge toward the abc conjecture via  $p$ -adic elliptic Diophantine approximation

研究代表者 平田 典子 (河野 典子) Noriko HIRATA-Kohno

日本大学・理工学部・教授

研究者番号：90215195

研究代表者の専門分野：

科研費の分科・細目：数学・代数学(4101)

キーワード：整数論、abc 予想、 $p$  進対数一次形式、 $p$  進楕円対数関数、楕円曲線

### 1. 研究計画の概要

$p$  進対数一次形式を用いて、abc 予想の評価を得る研究目的のために、 $p$  進楕円対数関数を用いて  $p$  進楕円対数の代数的数係数一次形式の  $p$  進付値の下からの評価を求める。

### 2. 研究の進捗状況

$p$  進対数一次形式の下からの評価から、abc 予想のより良い評価を得ることが、この研究の目的である。そのために、通常の数係数一次形式の逆関数である対数関数ではなく、 $p$  進楕円対数関数の逆関数である  $p$  進楕円対数関数を用いて、対数一次形式の下からの評価を求めている。まずは2個の  $p$  進楕円対数関数を考え、その代数的数係数一次形式の  $p$  進付値の下からの評価を考えた。今迄の評価を改良して、代数的数の高さに関する最良近似に至らしめたが、その主な手法は行列補間法と、楕円関数から楕円対数関数への変数変換を楕円曲線の Formal Group 上でおこなったということである。種々のデータに依存する評価の定数部分を完全に決定し、全て具体的に数値で表すことに成功している。実際の計算は  $p$  進解析の諸性質に基づいておこなわれた。また、岩澤の対数関数を用いた Yu Kunrui の  $p$  進対数一次形式の結果の類似を、 $p$  進楕円対数関数に関しておこなうことも出来た。岩澤の対数関数の場合は、全平面での解析接続が可能であるので通常の  $p$  進解析関数の持つ困難さが回避できる。これについては現在論文執筆中である。2009 年度中に発表した論文は、 $p$  進ではないアルキメデス付値における楕円対数一次形式の下からの評価についての最良近似であり、S. David との共同論文である。ここでは楕円関数の逆関数である楕円対数

関数を微分形式の形式積分としての級数で定義し、各係数の高さをうまく評価したことが成功の本質的な理由である。なお、2個の  $p$  進楕円対数関数のみならず、一般  $n$  個の  $p$  進楕円対数の代数的数係数一次形式に関する評価も現在計算しており、これが出版されれば、代数体で定義された楕円曲線で Mordell-Weil 群の基底のわかる場合の  $S$  整数点の計算が、常に可能となる。実際に  $S$  整数点を求めるには reduced bound の手法が用いられる場合に帰着させる必要がある。

### 3. 現在までの達成度

① 当初の計画以上に進展している。  
理由：まず2個の  $p$  進楕円対数の場合に最良近似に到達し、S. Lang の予想を完全解決したからである。また、2009 年度中に発表した S. David との共同論文も最良近似である。楕円対数関数の Taylor 展開の各係数の高さを通常の対数関数並みに評価したことが特筆すべき点である。

### 4. 今後の研究の推進方策

一般  $n$  個の  $p$  進楕円対数の代数的数係数一次形式に関する評価も求めたい。これを用いれば、楕円曲線において Mordell-Weil 群の基底が既知の場合に  $S$  整数点の計算が可能となる。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Sinnou DAVID and Noriko HIRATA-Kohno, Linear forms in elliptic logarithms, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 628, 37-89, 2009, 査読有.
- ② Sinnou DAVID and Noriko HIRATA-Kohno, Logarithmic Functions and Formal Groups of Elliptic Curves, Diophantine Equations (ed. N. Saradha), TIFR, Studies in Mathematics, Narosa Publishing House, 243--256, 2008, 査読有.
- ③ Noriko HIRATA-Kohno and Marc HUTTNER, Diophantine approximation of the values of hypergeometric function of Gauss, AIP Conference Proceedings Volume 976 (ed. Takao Komatsu) Diophantine Analysis and Related Fields: DARF2007/2008, Kyoto, ISBN:978-0-7354-0495-3, 106-110, 2008, 査読無.
- ④ Noriko HIRATA-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman, An extension of a theorem of Euler, Acta Arithmetica, Vol. 129 (1), 71-102, 2007, 査読有.

[学会発表] (計9件)

- ① Noriko HIRATA-Kohno, p-adic logarithmic functions and applications, Analytic Number Theory and Related Topics, RIMS, Kyoto University, October 14-16, 2009, October 16.
- ② Noriko HIRATA-Kohno, Exceptional classes of unit equations, Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, University of Tokyo, September 14-17, 2009, September 16.
- ③ Noriko HIRATA-Kohno and R. TAKADA, Linear forms in 3 p-adic elliptic logarithms, Diophantine Analysis and Related Fields 2009, Nihon University,

Tokyo, 2009 March 2-3, March 2.

- ④ Noriko HIRATA-Kohno, p-adic aspects in Diophantine approximations, Rencontre differentio-diophantienne, Institut Henri Poincare, Paris, France, March 25-27, March 25, 2009.
- ⑤ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, Workshop on Arithmetic Geometry: Diophantine approximation and Arakelov theory, The Fields Institute, Toronto, Canada, October 20-24, October 22, 2008.
- ⑥ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XII, 湘南国際村センター, July 12-16, 2008, Hayama, Japan, July 13.
- ⑦ Noriko HIRATA-Kohno and R. TAKADA, Linear forms in 3 elliptic logarithms, Diophantine Analysis and Related Fields 2008, March 5-7, 2008, Doshisha University, Kyoto, March 7, 2008.
- ⑧ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, Analytic Number Theory and Related Areas, October 17-19, 2007, RIMS, Kyoto, October 19.
- ⑨ Noriko HIRATA-Kohno, ディオファントス問題 (日本数学会 秋季総合分科会 企画特別講演), 日本数学会, 東北大学, September 23, 2007.

[図書] (計1件)

- ① 平田典子 (執筆者の一部) [著書] 日本数学会編 (岩波書店), 数学辞典第4版 数の幾何学と数論における近似の項目のうち数の幾何学・ディオファントス近似・超越数の項目, 1976 ページ中 582-584, 939-942, ISBN-13: 9784000803090, 2007, 査読有.