

平成22年5月11日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540053

研究課題名（和文） $p$ 進楕円ディオファントス近似を用いた abc 予想への新しい橋渡し

研究課題名（英文） A new bridge toward the abc conjecture via  $p$ -adic elliptic Diophantine approximation

研究代表者 平田 典子（河野 典子） Noriko HIRATA-Kohno

日本大学・理工学部・教授

研究者番号：90215195

研究成果の概要（和文）：2009年のCrelle誌第628巻に発表したS. Davidとの共同論文は、楕円対数一次形式のディオファントス近似であり、代数的数係数の高さに関する最良近似に初めて到達したものである。1964年以來の未解決予想であったS. Langの予想がこの結果により解決された。 $p$ 進版としては2個の $p$ 進楕円対数の一次形式の $p$ 進付値の下からの評価を与えた。両者とも代数的数係数に関する最良近似に到達し、従来の結果を改良している。 $p$ 進版の論文はKyushu Journal of Mathematics, 2010年第64巻2号に掲載決定されている。2個の $p$ 進楕円対数のみならず、一般 $n$ 個の $p$ 進楕円対数の代数的数係数一次形式に関する評価もまとめているが、これが出版されれば代数体で定義された楕円曲線に対してMordell-Weil群の基底のわかる場合の $S$ 整数点の計算が常に可能となる。

研究成果の概要（英文）：We prove a new Diophantine approximation for linear forms in elliptic logarithms (in Crelle, vol. 628, with S. David). As far as the height of the linear forms is concerned, our result is the first optimal one. We thus solve a conjecture of S. Lang dating back to 1964. We also show a  $p$ -adic version in a case, namely, a lower bound for linear forms in two  $p$ -adic elliptic logarithms. We refine here previous estimates in the dependency on the height of algebraic coefficients of the linear forms (the  $p$ -adic result is in press in Kyushu Journal of Mathematics, vol. 64, No.2, 2010). A lower bound for linear form, in  $n$  terms of  $p$ -adic elliptic logarithms, is in preparation. This generalization would be useful to determine the set of  $S$ -integer points on elliptic curves defined over a number field, whenever we know a basis of the Mordell-Weil group.

交付決定額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2007年度 | 700,000   | 210,000 | 910,000   |
| 2008年度 | 700,000   | 210,000 | 910,000   |
| 2009年度 | 700,000   | 210,000 | 910,000   |
| 総計     | 2,100,000 | 630,000 | 2,730,000 |

研究分野：数物系科学，数学

科研費の分科・細目：数学，代数学（4101）

キーワード：数論，ディオファントス近似，abc予想，対数一次形式，楕円曲線， $p$ 進楕円対数

## 1. 研究開始当初の背景

楕円対数一次形式のディオファントス近似について、代数的数係数の高さに関する最良近似に到達したものは、楕円曲線に虚数乗法のある場合に限られた。一般の楕円曲線の場合についても最良近似が得られるであろうと S. Lang により 1964 年に予想されていたが、未解決であった。

## 2. 研究の目的

$p$  進対数一次形式は、abc 予想の部分的評価を従えることが知られている。abc 予想型の更に進んだディオファントス近似を得る研究目的のために有用な、 $p$  進楕円対数の代数的数係数一次形式の非アルキメデス付値における下からの評価と、そのために重要なアルキメデス付値における楕円対数一次形式の研究を行う。

## 3. 研究の方法

研究打ち合わせ旅行および専門的知識提供の講演などの、専門家との対面に依る研究討議や、書籍購入をおこない、有効な知識や豊富な情報を得て、当初の予定よりも 1 年早く目標としていた成果を得ることが出来た。楕円曲線の Formal Group に於いて、楕円関数の逆関数である楕円対数関数を捉え、微分形式の形式積分級数として楕円対数関数を表して高さの評価を行ったことが成功の本質的な理由である。

## 4. 研究成果

主な結果は次の二点に要約される。

(1) 代数体上で定義された楕円曲線の有理点の楕円関数による逆像である楕円対数関数を考える。逆像は周期格子で割れば一意に定まる。楕円対数は一つの数であるが、これを楕円対数関数の値とみなすことが出来る。アルキメデス付値における代数的数係数楕円対数一次形式の下からの評価についてのディオファントス近似を S. David との共同論文 “Linear forms in elliptic logarithms”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 628, 37-89 (2009) として得た。楕円関数の逆関数である楕円対数関数は、微分形式の形式積分級数として定義できるので、これから Taylor 展開の係数の評価を求めることが出来る。ディオファントス近似の改良を示すために、従来の文献に見られないような対数関数を用いた証明を実行したことで、楕円関数を使う証明よりも代数的に良い評価を得ることができた。楕円関数は

代数群の指数写像と捉えられ、Taylor 級数展開の一般第  $n$  係数の分母には  $n!$  が入る。楕円対数関数も通常の対数関数と同様に、Taylor 級数展開の一般第  $n$  係数の分母は  $n!$  ではなく  $n$  になることが帰納的に証明できる。ただし楕円対数関数は解析的な性質は良くないので、困難を回避するために必要に応じて関数を楕円関数に戻すことも随時行った。証明の構造を変えずに、このような関数の変換を可能とするための重要な鍵となる補題は 2002 年に得た着想に負う。これを 1991 年の自身の論文において構築した平田の reduction と呼ばれる方法と組み合わせて、代数的数係数楕円対数一次形式の下からの最良評価を示し、S. Lang の 1964 年の近似に関する予想を解くに到った。

(2) 上記の結果 (1) の  $p$  進アナロジーを考え、2 個の  $p$  進楕円対数に関し、非アルキメデス  $p$  進付値における代数的数係数一次形式の下からの評価を証明した。論文は Noriko HIRATA-Kohno and Rina TAKADA, “Linear forms in two elliptic logarithms in the  $p$ -adic case”, *Kyushu Journal of Mathematics*, 64 巻 2 号に 2010 年 9 月発表予定である (掲載決定)。一般  $n$  個の  $p$  進楕円対数の代数的数係数一次形式に関する評価の計算もまとめており、これが出版されれば、Mordell-Weil 群の基底のわかる場合の楕円曲線の  $S$  整数点の計算が可能となる。楕円関数から楕円対数関数への変換を楕円曲線の Formal Group 上でおこない、楕円対数関数を要素とする行列の補間法に持ち込んで証明を遂行した。種々のデータに依存する評価の定数部分を完全に決定し、全て具体的に数値で表すことに成功している。また、岩澤の対数関数を用いた Yu Kunrui の  $p$  進対数一次形式の結果の類似を、 $p$  進楕円対数関数に関して部分的に考えることも出来た。岩澤の  $p$  進対数関数については、今回の考えを生かして今後の新たな課題として研究を行いたい。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Sinnou DAVID and Noriko HIRATA-Kohno, Linear forms in elliptic logarithms, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 628, 37-89, 2009, 査読有.
- ② Sinnou DAVID and Noriko HIRATA-Kohno,

Logarithmic Functions and Formal Groups of Elliptic Curves, Diophantine Equations (ed. N. Saradha), TIFR, Studies in Mathematics, Narosa Publishing House, 243--256, 2008, 査読有.

③ Noriko HIRATA-Kohno and Marc HUTTNER, Diophantine approximation of the values of hypergeometric function of Gauss, AIP Conference Proceedings Volume 976 (ed. Takao Komatsu) Diophantine Analysis and Related Fields: DARF2007/2008, Kyoto, ISBN:978-0-7354-0495-3, 106-110, 2008, 査読無.

④ Noriko HIRATA-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman, An extension of a theorem of Euler, Acta Arithmetica, vol. 129 (1), 71-102, 2007, 査読有.

⑤ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, RIMS Kokyuroku, vol. 1665, 2009, 152--159, 査読無.

[学会発表] (計 10 件)

① Noriko HIRATA-Kohno, Exceptional classes of unit equations, Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, University of Tokyo (September 14-17, 2009), September 16.

② Noriko HIRATA-Kohno,  $p$ -adic logarithmic functions and applications, Analytic Number Theory and Related Topics, RIMS, Kyoto University (October 14-16), 2009, October 16.

③ Noriko HIRATA-Kohno and R. TAKADA, Linear forms in 3  $p$ -adic elliptic logarithms, Diophantine Analysis and Related Fields 2009, Nihon University, Tokyo, 2009 March 2-3, March 2.

④ Noriko HIRATA-Kohno,  $p$ -adic aspects in Diophantine approximations, Rencontre

differentio-diophantienne, Institut Henri Poincare, Paris, France, March 25-27, March 25, 2009.

⑤ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XII, 湘南国際村センター (July 12-16), 2008, Hayama, Japan, July 13.

⑥ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, Workshop on Arithmetic Geometry: Diophantine approximation and Arakelov theory, The Fields Institute, Toronto, Canada (October 20-24), October 22, 2008.

⑦ Noriko HIRATA-Kohno, Unit equations having few solutions, Analytic Number Theory and Related Areas (October 17-19), 2007, RIMS, Kyoto, October 19.

⑧ Noriko HIRATA-Kohno, Almost integer valued functions in characteristic  $p$ , Diophantische Approximationen (April 15-21, 2007), Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, April 21.

⑨ Noriko HIRATA-Kohno and R. TAKADA, Linear forms in 3 elliptic logarithms, Diophantine Analysis and Related Fields 2008 (March 5-7), 2008, Doshisha University, Kyoto, March 7, 2008.

⑩ Noriko HIRATA-Kohno, ディオファントス問題 (日本数学会 秋季総合分科会 企画特別講演), 日本数学会, 東北大学, September 23, 2007.

[図書] (計 1 件)

① 平田典子 (分担執筆者)

日本数学会編集 (岩波書店), 数学辞典第 4 版, 数の幾何学と数論における近似の項目のうち, 数の幾何学・ディオファントス近似・

超越数の項目，総ページ 1976 ページ中  
582-584, 939-942, ISBN-13: 9784000803090,  
2007, 査読有.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)  
なし

○取得状況 (計 0 件)  
なし

〔その他〕

なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

平田 典子 (河野 典子)  
(日本大学・理工学部・教授)  
研究者番号: 90215195

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

① Sinnou DAVID  
(フランス Paris 第 6 大学・理学部・教授)  
研究者番号: なし

② Marc HUTTNER  
(フランス Lille 第 1 大学・理学部・教授)  
研究者番号: なし