

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540055

研究課題名（和文）射影多様体の割線多様体について

研究課題名（英文）On secant varieties of projective varieties

研究代表者

楫元（Kaji, Hajime）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70194727

研究成果の概要：

射影多様体の割線多様体を調べる際、射影多様体のガウス写像や射影双対を調べるのが重要と改めて気づき、主に深澤知氏（日本学術振興会特別研究員，受入機関：早稲田大学理工学術院）との共同研究を行った。そして、セグレ多様体の射影双対に関する再帰性、および、与えられた代数多様体の射影モデルのガウス写像の階数について研究を行った。当該研究期間中、3本の論文を学術雑誌（どれも査読あり）に発表し、国際会議等（2件）を含む8件の口頭発表を行った。また、2008年度末の時点において、掲載決定済みの論文が1本、投稿中の論文が1本、準備中の論文が1本ある。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：

代数幾何学，射影多様体，割線多様体，ガウス写像，射影双対，再帰的，分離拡大，セグレ積。

## 1. 研究開始当初の背景

与えられた射影多様体が点射影により同型に写されるか？という射影代数幾何の素朴な問題がある。自明な例外を除くために射影多様体は常に非退化、すなわち、超平面に含まれないものとする。この問題に関する最初の顕著な結果としては1901年のF. Severiの研究が挙げられよう。そこでは、4次元射影空間に同型に点射影できる5次元射影空間内の非特異射影曲面はヴェロネーゼ曲面に限ることが証明されている。

この問題を解く鍵は、射影代数幾何における基本的な研究対象である割線多様体に着目することである。というのは、簡単に示されるように、点射影により同型に写されるためには射影の中心が割線多様体に含まれないことが必要十分である。ここで射影多様体の割線多様体とは、射影多様体の異なる2点を結ぶ直線の和集合の閉包として定義される。非特異射影多様体の割線多様体の次元に関するある予想がR. Hartshorne氏により提出され、F. L. Zak氏により証明が与えられた。それは割線多様体の次元に関する不等式である。その後、その不等式の境界を与える射影多様体・セヴェリ多様体・の分類がZak氏により与えられた。その分類を見てみるとすべて等質射影多様体であることが解る。

そこで、割線多様体に関して射影幾何的に興味深い性質、著しい特徴をもつ多様体を研究する際には、等質射影多様体の場合に注目することが重要であると思われる。

射影多様体の割線多様体に関する申請者の研究は、割線多様体の退化した等質射影多様体の分類を試みたことが端緒となっている。余次元への仮定付きの分類はすでにZak氏により与えられていたが、申請者はその仮定を外して一般的な分類を与えた。分類の結果、割線多様体の退化する等質射影多様体として従来から知られていたもの以外に、新たな系列として随伴表現に対応する等質射影多様体・随伴多様体・が現れることが判った。

これを機に、随伴多様体の研究が重要であると考え、福井大学の保倉理美氏を共同研究者として詳しく研究を進めることにした。さらに、随伴多様体の割線多様体の contact loci および軌道分解を調べた。一方、高次の割線多様体については、射影多様体の埋め込みの構造を調べる上で重要な対象と考えられ、Zak氏を初めとする人々により研究されてきている。特に随伴多様体に関してはK. Baur氏、J. Draisma氏により、付随する単純リー代数がBD型の場合に高次割線多様体の次元および軌道分解に関する研究が行われてい

る。

## 2. 研究の目的

以上を踏まえて本研究においては、随伴多様体の(高次)割線多様体の構造を明らかにすることを目的とした。さらにそれが成功した場合は、随伴多様体の場合をモデルケースとして、一般の等質射影多様体の割線多様体の構造を明らかにすることを目的とした。

申請者は、これまでの自身の研究を通じて、随伴多様体や等質射影多様体の割線多様体の構造を詳しく調べるには、リー環の次数構造(次数付け)の理論、さらに、リー代数の具体的構成の基礎となる3項演算をもつ代数系、すなわち、3項系の理論が重要であると考え、これまでの割線多様体の研究では一般に射影代数幾何的ないし微分幾何手法が用いられ、等質の場合にはさらに、複素代数群の表現論が援用されてきた。一方、対称空間の研究にいろいろな3重系の理論が重要であることはよく知られている。3重系の理論を射影代数幾何の問題の解決に応用しようという発想は従来にはなかったもので、本研究の著しい特色、独創的な点と言える。また、本研究の副産物として逆に、対称空間の理論、3重系の理論等への新しい知見を得られることが期待される。たとえば、フロイデンタールの幾何学はすでに完成されたものであるが、そこに新しい代数幾何的見地からの意味付け、または、解釈が見いだせると期待される。

## 3. 研究の方法

研究期間当初、随伴多様体の高次割線多様体について研究を行う予定であったが、「研究成果の概要」に述べたように次第に、射影多様体の割線多様体を調べるには射影多様体のガウス写像や射影双対を調べるのが重要と考えるようになった。さらに、純代数的にどこまで解明できるか明らかにすることが重要と考えたため、一般標数における割線多様体の性質について研究することとした。そこで、主に深澤知氏(日本学術振興会特別研究員、受入機関:早稲田大学理工学術院)との共同研究を以下に述べる方法で行うこととした。

(1) セグレ多様体の射影双対に関する再帰性: 基礎体の標数が正である代数幾何学においては、標数零の場合では起こり得ない様々な現象が観察されている。特に射影多様体の埋込接空間の振舞に関する正標数特有の現象の多くはガウス写像の分離性、および、射影双対に関する再帰性によりコントロールされるこ

とが知られている。ここで注意すべきは、割線多様体が退化している場合は、フルトン-ハンセンの連結性定理により、埋込接空間の和集合として定義される接線多様体と一致するということである。つまり、興味のある退化した割線多様体を持つ射影多様体の場合には、接線多様体の研究はまさに割線多様体を研究と一致する。

本研究代表者の従来の研究、深澤知氏(学術振興会特別研究員)の研究、そして、深澤氏との共同研究の過程で解ってきたことは、射影多様体のセグレ積(つまり、直積のセグレ埋込による像)により、上記問題に関して興味深い様々な例が構成できることである。ここでいう"興味深い例"とは、ガウス写像が分離的にもかかわらず再帰的ではない射影多様体のことであり、1990年初頭証明されたS. Kleiman-R. Pieneの定理「再帰的ならばガウス写像が分離的となる」の逆が成り立たない事を示すものである。そこで、セグレ多様体の射影双対に関する再帰性についてより一般的に研究することとした。

(2) 射影多様体のガウス写像の階数: 射影多様体のガウス写像の階数として取り得る値について研究する。まずは双有理埋込みの場合について考察する。つまり、与えられた代数多様体の射影モデルのガウス写像の階数について研究する。できれば、双正則埋込みの場合についても考察したい。

#### 4. 研究成果

(1) 射影空間 $P^m$ と射影多様体  $Y$  のセグレ積  $X$  に対して、 $X$  が再帰的となるための必要十分条件を  $m$ ,  $\dim Y$ , そして、 $Y$  の一般ヘッセ行列の階数で記述することに成功した。これにより従来、散発的に構成されていた様々な例の再帰性(または非再帰性)を統一的かつ理論的に説明することが可能となった。またこれは、本研究代表者の、2つ以上の射影空間のセグレ積の再帰性に関する結果「On the duals of Segre varieties, Geometriae Dedicata 99 (2003), 221--229」の一般化を与えている。この成果は、「5. 主な発表論文等 [雑誌論文]」の [1] にまとめ発表した。

(2) 与えられた代数多様体に対してその射影モデルのガウス写像の(微分の)階数がどのような値を取り得るか明らかにした。特に任意の代数多様体はガウス写像の階数が零となる射影モデルを持つことを示した。これは研究代表者による射影代数曲線に関する論文「On the Gauss maps of space curves in

characteristic  $p$  (Compositio Math. 70 (1989), 177--197)」の結果のひとつの高次元化となっている。

次に、代数多様体を(同型を保って)埋め込んだ場合に対するガウス写像の階数に関して考察し、標数が  $p > 2$  の場合には射影空間の積にはガウス写像の階数が零となる埋め込みが存在しないことを示した。以上の成果は論文「Any algebraic variety in positive characteristic admits a projective model with inseparable Gauss map」に纏め現在、学術雑誌に投稿中である。(この研究成果報告書の執筆時点では、すでに掲載決定済みである。)

さらにこの成果から発展して、深澤氏および早稲田大学大学院博士後期課程在学中の古川勝久氏との3人による共同研究を開始した。これについてはまだ論文を纏めるに至っていない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

[1] S. Fukasawa, H. Kaji, The reflexivity of a Segre product of projective varieties, Math. Annalen 342 (2008), 279-289. 査読有。

[2] S. Fukasawa, H. Kaji, Existence of a non-reflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety, Math. Nachrichten 281 (2008), 1412-1417. 査読有。

[3] S. Fukasawa, H. Kaji, The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface, Math. Zeitschrift 256 (2007), 699-703. 査読有。

[学会発表](計8件)

(1) 榎元, The separability of the Gauss map versus the reflexivity, 研究集会「代数幾何学 in 九州」, 2009年2月2日, 九州大学。

(2) 榎元, 深澤 知, The reflexivity of a Segre product of projective varieties, 日本数学会, 2008年9月25日, 東京工業大学。

(3) 榎元, 深澤 知, Existence of a non-reflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety, 日本数学会, 2008年9月25日, 東京工業大学。

(4) 楯元, Existence of a nonreflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety, 2007年8月17日, International Conference "IV Iberoamerican Conference on Complex Geometry" (Ouro Preto, Brazil).

(5) 楯元, Existence of a nonreflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety, 2007年8月10日, Seminario de Algebra "Sun from Japan", Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Rio de Janeiro, Brazil).

(6) 楯元, Projective varieties with degenerate secant varieties, 2007年6月14日, Colloquium, National Institute for Mathematical Sciences (Daejeon, Korea).

(7) 楯元, Projective varieties with degenerate secant varieties, 2007年6月12日, Algebraic Geometry Seminar, Seoul National University (Seoul, Korea).

(8) 楯元, Projective geometry of adjoint varieties, 2007年6月12日, Algebraic Geometry Seminar, Seoul National University (Seoul, Korea).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

楯元 (KAJI HAJIME)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 70194727

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし